

Metoda konečných prvků

Jaroslav Schmidt

Datum poslední aktualizace: 20. dubna 2024

Text je zatím jen souhrn poznámek a nemá dostatečnou koherenci. Některé odstavce jsou plně popsány, jinde jsou rovnice uvedeny bez poznámek a jinde chybí třeba doplnit obrázky. Časem budou nejasné odstavce přepsány a do nutných míst doplněny obrázky nebo text. V případě objevených nedostatků, prosím o zpětnou vazbu.

Obsah

1 Plán	5
1.1 Poznámky	6
2 Slabá formulace	7
2.1 Matematický popis fyzikální reality	8
2.2 Nedostatky diferenciální formulace	9
2.3 Silná a slabá forma	11
2.4 Aplikace slabé formy	13
2.5 Energetické metody	15
2.6 Metody vážených reziduí	17
2.7 Slabá derivace - Jen dočasné umístění	19
3 Metoda konečných prvků	21

Kapitola 1

Plán

Přibližný plán práce:

- Představení slabé formy na 1D případě. Nejprve proč nefunguje silná formulace a pak jak odvodit slabou formulaci - zdůraznit, že se jedná o formu, která se ukázala vhodná pro numerické metody. Slabou formu odvodit ze silné formy a také z energie minimalizací.
- Představení v rychlosti metodu vážených reziduí a použít to jako motivaci k zavedení metody konečných prvků.
- Metoda konečných prvků v 1D. Rozdělení intervalu na elementy a následná diskretizaci. Ukázka práce s bázovými funkcemi na jednom elementu a následná lokalizace pro získání matice tuhosti statického lineárního problému. Integrace přes element Gaussovou integrací a díky tomu rozšíření pro prvky vyšších řádů než lineární. Nutné podmínky pro správně definovanou variační úlohu - kompletnost prostoru, spojitost prvků.
- Rozšíření do 2D. Možná jen povrchně, zdržet se diskuzí ohledně geometrické implementace - to za nás dělá fenics. Zmínit, ale nepitvat se v tom.
- Případné rozšíření pro vektorovou funkci a ukázka smíšené formulace - třeba pružnost + teplo.
- Rozšíření variační formulace pro dynamickou úlohu - Euler Lagrangeovy rovnice 2. druhu.
-

1.1 Poznámky

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jaká témata budou postupně studentům ukazována:

- 1D skalární příklad pro úvod do metody konečných prvků
- 2D případ
- Vektorový případ pro ukázkou práce s podprostory
- Projekce do prostoru, práce se složitějšími funkcemi
- Dynamická úloha

Co je cílem:

- Představit jak analyzovat zadání, poznat o jaký typ úlohy se jedná
- Mít představu jak odvodit slabou formulaci a zda se jedná o lineární nebo nelineární úlohu
- Mít představu o diskretizaci, jak by měla vypadat síť, jaké má vlastnosti
- Numerická integrace, gaussovy body
- Jak se ze slabé formulace po diskretizaci stane problém lineární algebry, nastínit problémy, řídké matice apod. Ukázat jak pracovat s maticemi
- Ukázat vlastní Newtonovu metodu pro nelineární problém
- Postprocess, vyhlazování řešení

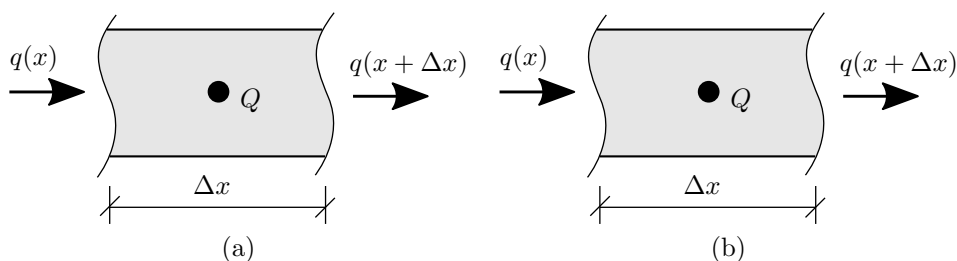
Kapitola 2

Slabá formulace

Většina výukových textů na metodu konečných prvků je laděna inženýrsky. Typicky pro stavební mechaniku je představena nejprve deformační metoda pro výpočet prutové soustavy a následně je provedeno zobecnění a přechod na metodu konečných prvků. Dále je dán veliký důraz na schopnost popsat geometricky všechny možné druhy prvků, vhodně je numericky zintegrovat apod. Na druhé straně leží matematické texty, kde jsou zavedeny příslušné abstraktní vektorové prostory a důraz je kladen na matematickou rigoróznost. V tomto textu se pokusíme najít moderní cestu jdoucí kdesi mezi těmi výše zmíněnými. Zejména nám jde o to, aby:

1. Textu zůstala potřebná matematická rigoróznost. Nepůjde nám o důkaz existence řešení v sobolevových prostorech, spíše o to poukázat na okamžiky, kdy úloha už není vhodně zadaná neboť použité funkce nejsou ze správného prostoru.
2. Přestože jsou technické detaily důležité pro pochopení metody do hloubky, některé jednotlivosti nejsou nezbytné pro pochopení principů a protože tento text není nafukovací, omezíme se zejména na ty důležité numerické aspekty a některé technické detaily nebudeme rozvádět. Je to v souladu s myšlenkou, že dnes jednotlivec nebude psát MKP software od počátku až do konce, spíše použije nějaké předpřipravené knihovny.
3. V návaznosti na předchozí bod se i tak snažíme o to, aby se použitý software nestal backboxem. Proto je občas kladen důraz na příklady, kdy použité metody selhávají. I proto je v doprovodných materiálech použit konečněprvkový řešič FEniCSx, který umožňuje přímou modifikaci libovolné části procesu.

V tomto textu předpokládáme, že čtenář umí fyzikální problémy popisovat diferenciálními rovnicemi a již (minimálně okrajově) se setkal s funkcionální analýzou a je obeznámen s pojmem slabého řešení diferenciální rovnice. Pro úplnost a dobrou orientovatelnost v textu jsou základní pojmy představeny,



Obrázek 2.1: Bilanční diagram pro fyzikální systém taženého/tlačeného prutu (a) a systém vedení tepla (b)

ovšem bez matematického důrazu na rigoróznost. Jedná se navíc čistě o inženýrský text, takže důkazy existence a jednoznačnosti řešení přesahují rámec této práce.

2.1 Matematický popis fyzikální reality

Nechť měříme polohu nějaké částice (jakékoliv, může to být elektron, automobil nebo třeba planeta) v nějakém konkrétním čase a zajímá nás, jak se její pohyb bude vyvíjet v čase dál. V tom případě nestačí znát pouze polohu částice, ale je nutné znát i její rychlost. A právě tato závislost na rychlosti je důvodem, proč fyzikální problémy nestačí popisovat algebraickými rovnicemi, ale pro popis potřebujeme rovnice diferenciální.

Pro utvrzení tohoto názoru ukážeme v této kapitole odvození diferenciální rovnice velmi jednoduchého fyzikálního systému, který pravděpodobně každý z vás zná. Nicméně tento systém dále použijeme pro ukázkou toho, kdy selhává a jakým způsobem se s tím vypořádat. Jedná se o tažený/tlačený prut, chcete-li tenký sloup nebo nosník, který je namáhám pouze podélnými silami.

Uvažujme prut, který je dlouhý L , je tedy plně popsán pořadnicí $x \in \langle 0, L \rangle$. Pro odvození diferenciální rovnice vhodné poslouží krátký element délky Δx vyjmutý z prutu, ten je zobrazen na obrázku 2.1. Na každém takto vyjmutém elementu musí platit podmínka rovnováhy, která říká, že silová výslednice na této části musí být nulová. Tedy

$$-N(x) + N(x + \Delta x) + f(x)\Delta x = 0, \quad (2.1)$$

kde N je normálová síla a f je vnější zatížení. Tato rovnost musí platit pro libovolně velký element, tedy musí platit i v limitním případě kdy $\Delta x \rightarrow 0$, čímž se diferenční rovnice uvedená stane diferenciální

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} = \frac{dN(x)}{dx} = -f(x). \quad (2.2)$$

Této rovnici říkáme Schwedlerova věta a udává vztah mezi vnějším zatížením a vnitřní silou. Jelikož budeme chtít využít známý lineární Hookeův zákon $\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x)$ s materiálovou konstantou E , je výhodné přejít z diferenciální rovnice

popisující normálovou sílu k rovnici popisující přímo napětí. Zuto transformaci lze provést obyčejným přenásobením síly N plochou průřezu A . Dostáváme

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)A(x)) = -f(x) \quad (2.3)$$

a tedy díky Hookeově vztahu rovnou

$$\frac{d}{dx}(E(x)A(x)\varepsilon(x)) = -f(x), \quad (2.4)$$

kde ε je tzv. deformace, tedy relativní velikost posunu vzhledem k původní poloze nosníku. Pokud zavedeme veličinu $u(x)$ jakožto absolutní posun bodu x , potom je ε rovno změně veličiny u , tedy $\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$. Dosazením do naší rovnice získáváme hledaný tvar diferenciální rovnice taženého/tlačeného prutu

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)A(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = f(x), \quad (2.5)$$

Pro přehlednost budeme často u fyzikálních veličin E, A vynechávat explicitní zápis závislosti na pořednici x a zároveň je vhodné derivaci funkce jedné proměnné značit čárkou. Tedy následující rovnost je zapsána sice jinak, ale má symbolizovat totéž a tohoto neformálního zjednodušení budeme často využívat

$$-(EAu'(x))' = f(x), \quad (2.6)$$

Tato diferenciální rovnice sice značí změnu jedné veličiny, když dojde ke změně jiné veličiny. Systém ale pořád není popsán dostatečně, tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení. Pro zúplnění fyzikálního systému je nutné dodat okrajové nebo počáteční podmínky, tedy v jistém smyslu potřebujeme znát stav systému v krajních polohách. Zde se sice jedná o 1D prut a tedy okrajové jsou pouze dva body $x = 0$ a $x = L$, ale pro účely pozdějšího zobecnění zůstaňme v abstraktní rovině. Oznamčme hranici našeho vyšetřovaného systému jako Γ . Na každé části takové hranice musí být předepsán buď posun a nebo zatížení. Z toho důvodu rozdělujeme disjunktně hranici na $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$, kde Γ_u je hranice s předepsanými posuny (Dirichletova okrajová podmínka) a Γ_f je hranice s předepsanými silami F (Neumannova okrajová podmínka). Jelikož jsme ukázali, že vnitřní síla v 1D prutu se spočte jako $N(x) = EAu'(x)$, takže vlastně na Γ_f vynucujeme první derivaci pole posunutí jako $u'(x) = F(x)/EA$. Naš systém je tedy plně popsán následující okrajovou úlohou

$$-(EAu'(x))' = f(x), \quad x \in (0, L), \quad (2.7)$$

$$u(x) = \bar{u}, \quad x \in \Gamma_u \quad (2.8)$$

$$u'(x) = F(x)/EA, \quad x \in \Gamma_f. \quad (2.9)$$

2.2 Nedostatky diferenciální formulace

Diferenciální rovnice jsou sice velmi silným nástrojem pro popis přirozených fyzikálních systémů, ale občas kladou až přílišný požadavek na spojitost řešení

a jejich derivací. Přitom fyzikální systémy jsou ve své hluboké podstatě nespojitými jevy, zejména kvůli kvantovému charakteru. Na zjednodušené makroúrovni se sice může ukázat spojitý popis jako výhodný, ale občas se hodí od požadavku na spojitost ustoupit. To lze demonstrovat hned jednoduchým způsobem zatížení taženého/tlačeného prutu.

Uvažujme prut, který je vyroben z dvou různých materiálů, tedy jeho materiálová konstanta E je nespojitá funkce. Konkrétně levá polovina prutu je z materiálu s materiálovým parametrem $E = 1$ a pravá polovina má $E = 2$. Pro funkci posunů $u(x)$ předpokládáme předepsané okrajové podmínky $u(0) = 0, u(L) = 1$. Dále zjednodušeně uvažujme nulové vnitřní zdroje a plochu $A = 1$.

Náš systém je tedy plně popsán následující okrajovou úlohou

$$-u''(x) = 0, \quad x \in \langle 0, L/2 \rangle, \quad (2.10)$$

$$-2u''(x) = 0 \quad x \in (L/2, L), \quad (2.11)$$

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 1. \quad (2.12)$$

Jak uvidíme dále, nespojitost v bodě $L/2$ nám může přinášet jisté matematické obtíže, ale s odhlédnutím od rigoróznosti můžeme náš systém i přesto vyřešit, i když jen v inženýrském smyslu. Řešení na každé polovině lze získat přímou integrací, a jelikož je každá část z jiného materiálu, dostáváme po částech lineární řešení ve tvaru

$$u_1(x) = C_1x + C_2, \quad \text{kde } x \in \langle 0, L/2 \rangle, \quad (2.13)$$

$$u_2(x) = C_3x + C_4, \quad \text{kde } x \in (L/2, L). \quad (2.14)$$

Pro jednodušší práci s nespojitostí jsme funkci řešení na každé části označili jiným symbolem. Řešení na levé části je označeno u_1 , zatímco průběh posunů na druhé části jako u_2 . Vyskytují se zde 4 neznámé parametry, které lze ale jednoduše a intuitivně zjistit. V první řadě musíme vynutit okrajové podmínky, čímž jsou dány hned 2 volné parametry

$$u_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad (2.15)$$

$$u_2(L) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 1 - C_3L. \quad (2.16)$$

Další přirozenou podmínkou je spojitost funkce $u(x)$ v bodě $x = L/2$, tedy $u_1(L/2) = u_2(L/2)$. Jak bylo uvedeno, veličinu $N = -EAu'(x)$ fyzikálně interpretujeme jako normálovou sílu. Tedy sílu, kterou nosník v daném místě přenáší. Taková veličina musí být v celé tyči konstantní a to tedy zejména platí i v bodě $x = L/2$. Tedy musí platit $N(L/2_-) = N(L/2_+)$. Z těchto dvou podmínek dostáváme i hodnoty posledních volných parametrů

$$u_1(L/2) = u_2(L/2) \quad \Rightarrow \quad C_1L/2 = 1 - C_3L/2, \quad (2.17)$$

$$u_1'(L/2) = 2u_2'(L/2) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_3. \quad (2.18)$$

U druhé zmíněné podmínky nastává problém, protože funkce u_1 ani funkce u_2 nemají v bodě $L/2$ derivaci. Parametry C_1 a C_3 jsme získali uvažováním

jednostranných derivací. Z právě zmíněných podmínek lze jednoduchými algebraickými úpravami získat výsledné řešení

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3L}x, & \text{kde } x \in \langle 0, L/2 \rangle, \\ \frac{2}{3L}x + \frac{1}{3}, & \text{kde } x \in (L/2, L). \end{cases} \quad (2.19)$$

Toto řešení zaslouží drobný komentář.

Námi nalezené řešení (2.19) je problematické zejména v tom, že v matematickém smyslu nespĺňuje rovnici (2.12) - v bodě $L/2$ totiž neexistuje vlastní derivace. V inženýrském měřítku se nám sice podařilo jakési řešení odvodit, ale to nic nemění na tom, že výsledné řešení není dvakrát diferencovatelné a singularita v bodě x/L nám neumožňuje řešení prohlásit za platné. Řešení splňující požadavek daný původní diferenciální rovnicí se nazývá tzv. klasické řešení. Nicméně jak bylo ukázáno v příkladu výše, ne vždy je možné požadavky na spojitost derivací splnit a ne vždy klasické řešení existuje. A předchozí příklad měl ukázat, že neexistence řešení se může objevit i v případech zcela triviálních. Může vyvstat otázka, co je špatně s diferenciální rovnicí, že nemá řešení. Nicméně naše rovnice je správná a není s ní nic v nepořádku, jen přechodem na diferenciální formu vynucujeme až přespřílišný požadavek na regulárnost funkcí. Je tedy v jistém smyslu přirozenější pracovat spíše s integrální verzí naší rovnice, která ustupuje od požadavků na spojitost derivací. Převodem rovnice na integrální vztah získáváme tzv. silní či slabé řešení. O tom více v následující části.

2.3 Silná a slabá forma

Pojem silná a slabá forma je konstrukt, který umožňuje ustoupit z požadavku na regularitu řešení a také snižuje požadavek na spojitost derivací. Nicméně v literatuře není prozatím jednotnost v tom, co jednotlivé pojmy znamenají a jaké jsou jejich definice. O to důležitější je v této kapitole představit náš pohled na věc.

Jak bylo uvedeno výše, řešení diferenciálního systému (2.7)-(2.9) nazýváme **klasickým řešením**, pokud je diferenciální rovnice splněna v každém bodě. Pro lepší práci s rovnicí představíme úpravu, která se bude zdát trochu umělá, ale ukazuje se, že pro potřeby numerických metod je velmi vhodná. Spočívá ve dvou základních bodech:

1. Celou naši diferenciální rovnici přenásobíme tzv. váhovou funkcí $w(x)$,
2. Rovnici zintegrujeme přes celou doménu.

Pokud tyto dva kroky provedeme pro rovnici taženého/tlačeného prutu, potom dostaneme následující identitu

$$-\int_0^L w(x)EAu''(x) dx = \int_0^L w(x)f(x) dx. \quad (2.20)$$

Rovnice výše říká, že diferenciální rovnice nemusí být splněna všude, jen v jistém smyslu průměrně na dané doméně (rozmyslete si). To, o kolik nebude

rovnice splněna označujeme jako reziduum a přenásobením w a zintegrováním přes doménu lze vnímat také jako vážení, proto někdy o této rovnici mluvíme jako o vážených reziduech.

Původní diferenciální rovnice tedy není ekvivalentní s integrální rovnicí, záleží na volbě w . Abychom vynutili přímou ekvivalenci mezi diferenciální a integrální formou, je nutné požadovat, aby integrální forma platila ne pro jednu vyvolenou funkci w , ale pro všechny myslitelné funkce w . Tedy, na funkci w vkládáme jeden dodatečný požadavek a to aby byla rovna nule v místech vynucených Dirichletovských okrajových podmínek, tedy aby $\delta u(0) = 0$. Vychází to z toho, že v tomto místě nesmí být rovnost splněna přibližně, ale pro každé w musí být splněna přesně, neboť tuto hodnotu vynucujeme. Naši integrální rovnici je tedy potřeba upravit na tvar

$$-\int_0^L w(x)EAu''(x) dx = \int_0^L w(x)f(x) dx, \quad \forall w(x), w(x) = 0|_{\Gamma_u}. \quad (2.21)$$

V integrální rovnici vystupuje funkce w a druhá derivace funkce u . Právě proto je vhodné aplikovat metodu per partes na levou stranu, tedy

$$\int_0^L EA w(x)u''(x) dx = EA w(x)u'(x)|_{\Gamma_f} - \int_0^L EA w'(x)u'(x) dx. \quad (2.22)$$

Okrajový člen je vyčíslen na celé hranici, nicméně víme, že pro Γ_u platí $w = 0$, tedy tento okrajový člen zůstává vyčíslován jen na hranici Γ_f . Tedy po dosazení do původní rovnosti dostáváme

$$\int_0^L EA w'(x)u'(x) dx - EA w(x)u'(x)|_{\Gamma_f} = \int_0^L w(x)f dx, \quad \forall w(x). \quad (2.23)$$

Jak je vidět z integrálního výrazu na levé straně, došlo ke snížení řádu derivace funkce $u(x)$. Tedy dosáhli jsme našeho cíle - snížení požadavků na regularitu řešení. Této rovnici říkáme **slabá forma** a řešení této rovnice říkáme **slabé řešení**. Tyto úvahy opět žádají komentář.

Představené integrální rovnice jsou v jistém smyslu umělým konstruktem, který nám nikterat nepomáhá. V inženýrských knihám o metodě konečných prvků se dočtete, že rovnice (2.21) je ekvivalentní s původní diferenciální rovnicí. Pokud totiž není diferenciální rovnice v nějakém bodě splněna, můžeme naši testovací funkci zvolit takovou, že je rovna jedné v tomto bodě a nule všude jinde. Pokud tedy nebude splněna diferenciální rovnost všude, nebude splněna ani integrální rovnice pro všechna myslitelná w . K čemu je tedy libovolná z uvedených integrálních forem? Odpověď na tuto otázku by se dala shrnout do dvou bodů.

Zaprvé se ukazuje, že integrální forma je formou velmi vhodnou pro zavedení celé řady numerických metod označených jako metody vážených reziduí. Zejména metoda konečných prvků, která diskretizuje právě slabou formu, je díky jejímu tvaru velmi dobře implementovatelnou a algoritmizovatelnou metodou. Už jen tato výhoda by pro nás měla být dostačující.

Všimněme si ale jedné věci. Vezměme např. náš příklad s taženým prutem s nespojitým materiálovým parametrem E . Tato úloha vedla na po částech lineární funkci, která neměla v bodě $x = L/2$ derivaci. Aby naše integrální rovnice (2.21) byla splněna, musí být splněna pro všechna myslitelná w , tedy i pro takovou funkci, která bude mít hodnotu jedna v bodě $L/2$ a nula všude jinde. Nicméně pokud zvolíme takovou váhovou funkci, nebude splněna ani rovnice (2.21) a navíc nemůžeme provést per partes, neboť taková funkce není derivovatelná. Pro překonání takových obtíží matematikové zavádí tzv. zobecněné funkce, neboli distribuce.

Původní diferenciální rovnice sice nabádá k tomu být spněna v každém bodě, ale integrální forma (2.21) je motivací k uvědomnění si, že není nutné splnit rovnici všude, ale ve skutečnosti ji stačí splnit jen skoro všude, tedy všude až na množinu míry nula v Lebesgueově smyslu. To se dá vlastně vstáhnout i na původní diferenciální rovnici, proč se tedy zaobírat integrální formou? Jak bylo uvedeno - je vhodnější na implementaci. Matematikové označují řešení, které splňuje diferenciální rovnici skoro všude jako **silné řešení**. No a podobně je to se slabou formou (2.23). Jak bylo uvedeno, ne všechny funkce w jsou derivovatelné a tedy rovnost (2.23) je splněna pro jinou množinu funkcí. Nebudeme se o tom nyní zmiňovat více, stačí to brát tak, že chceme po u i w , aby měly první derivace, které mají konečné integrály. Tato znalost je prozatím dostačující.

2.4 Aplikace slabé formy

Nyní si ukažme velmi hezký příklad toho, jak nám může slabá forma pomoci v případech, že nemáme všechny informace. Jedná se vlastně o první ukázkou numerické metody pro řešení diferenciální rovnice, na které je vidět síla slabé formy.

Řekněme, že opět vyšetřujeme tažený/tlačený prut, který je na levém konci ($x = 0$) upevněn a na pravé straně je volný konec, tedy působí zde nulová osamělá síla. Navíc je prut zatížen konstantním spojitým zatížením f , stejně tak i parametry E , A uvažujeme konstantní.

Analytické řešení

Tato diferenciální rovnice má přímé analytické řešení, které můžeme využít k analýze našeho přibližného řešení. Řešení uvedené rovnice lze získat prostou přímou integrací, čímž postupně dostáváme:

$$u'(x) = -\frac{1}{EA} \int f_0 dx = -\frac{f}{EA}x + C_0, \quad (2.24)$$

$$u(x) = -\frac{f}{EA} \int x dx + \int C_0 dx = -\frac{f}{2EA}x^2 + C_0x + C_1. \quad (2.25)$$

Konstanty C_0 a C_1 získáme z okrajových podmínek $u(x = 0) = 0$ a $EAu'(x = L) = 0$. Cauchyho řešení je tedy

$$u(x) = -\frac{f}{2EA}x^2 + \frac{fL}{EA}x, \quad (2.26)$$

čímž získáváme přesné řešení.

Přibližné lineární řešení

Uvažujme nyní, že přesné řešení neznáte a nebo je příliš komplikované, abychom jeho řešení získali. Potom se můžeme pokusit řešení hledat ve tvaru námi zvolené funkce. Pokusme se hledat řešení námi vyšetřované rovnice v lineárním tvaru. Tedy hledáme řešení ve tvaru $u_p(x) = ax + b$. Jelikož musí platit okrajová podmínka $u(0) = 0$, rovnou z ní získáváme $b = 0$. Pokud se pokusíme námi hledané řešení dosadit do silné formy, tak nedostaneme žádný smysluplný výsledek, protože se nám funkce dvojitou derivací vynuluje. Nicméně pokud hledáme řešení ze slabé formy, získáme lepší výsledky. Předpokládejte stejnou regularitu testovací funkce, tedy testovací funkce volíme také z prostoru lineárních funkcí, kde $w_p(0) = 0$, tedy $w_p(x) = cx$. Po dosazení do slabé formy dostáváme integrální vztah

$$\int_0^L EAac \, dx = \int_0^L fcx \, dx, \quad \forall c, \quad (2.27)$$

což lze rovnou přímo integrovat, čímž dostáváme

$$\left(EAaL - \frac{1}{2}fL^2 \right) c = 0. \quad (2.28)$$

Jelikož musí být tato rovnost platná pro libovolné c , musí být rovna nule závorka vlevo, tedy dostáváme přímo vztah, z kterého lze vyjádřit hledané a , tedy

$$a = \frac{fL}{2EA}. \quad (2.29)$$

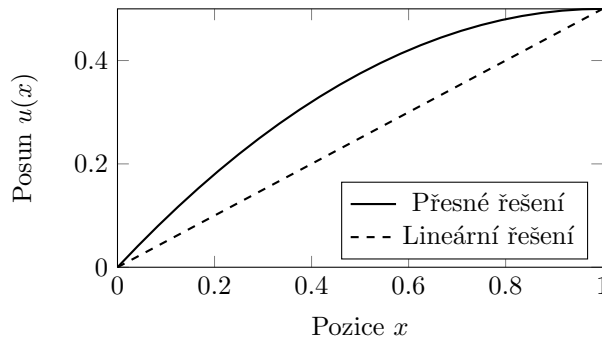
Nyní můžeme porovnat naše přibližné lineární řešení a přesné řešení. Matematicky dostáváme

$$\text{Přesné: } u(x) = -\frac{f}{2EA}x^2 + \frac{fL}{EA}x, \quad \text{Lineární: } u_p(x) = \frac{fLx}{2EA}. \quad (2.30)$$

Grafické porovnání výsledků pro $E = 1, A = 1, L = 1$ a $f = 1$ je uvedeno v obrázku 2.2. Zajímavé je, že i když nám vyšla aproximací nesprávná funkce, přesto nám na konci prutu v $x = L$ dává přesnou hodnotu. Je vhodné zmínit, že to není zvykem. Jedná se spíše o hezkou náhodu. Přesto je vidět, že naše slabé aproximované řešení má jistou vypovídající hodnotu. Navíc se pojdme podívat na derivaci naší aproximované funkce a přesného řešení, dostáváme

$$u'(x) = -\frac{fx}{EA} + \frac{fL}{EA}, \quad u'_p(x) = \frac{fL}{2EA} \quad (2.31)$$

Je zde krásně vidět jedna věc. První derivace aproximované funkce je rovna průměrné hodnotě přesné derivace. Je to tím, že první derivace není sice splněna přesně, ale v jistém smyslu alespoň průměrně. Ukažme to ještě jinak. Předpokládejme



Obrázek 2.2: Porovnání silného přesného řešení s lineárním přibližným řešením.

opět, že naše testovací (váhové) funkce jsou tvaru $w = cx$ a připomeňme slabou formu s dosazením těchto váhových funkcí

$$\int_0^L EA cu'(x) dx = \int_0^L f cx dx, \quad \forall c. \quad (2.32)$$

Předpokládejme chvilku, že zatím neznáme hledanou funkci $u(x)$. Ostatní je ale známo, proto můžeme zbytek zintegrovat a dostáváme

$$cEA \int_0^L u'(x) dx = c \frac{fL^2}{2}, \quad \forall c. \quad (2.33)$$

Rovnost lze ještě algebraicky upravit a podělit délkou L . Navíc má být splněna pro všechna c , tedy c lze eliminovat a dostáváme rovnost

$$\frac{1}{L} \int_0^L u'(x) dx = \frac{fL}{2EA}. \quad (2.34)$$

A právě tento vztah je ukázkou toho, co znamená splněno v průměrném smyslu, protože na levé straně máme přímo definici průměrné hodnoty funkce na intervalu $\langle 0, L \rangle$. Tedy naše hledané slabé řešení by mělo být takové, že jeho první derivace by mělo mít v průměru hodnotu $fL/(2EA)$, což souhlasí přesně s naším výsledkem.

2.5 Energetické metody

Klasická nerelativistická Newtonova mechanika popisuje vztah mezi objekty pomocí pohybových rovnic založených na pojmu síly. Popis vztahu mezi částmi systému pomocí vzájemně působících sil ale není jediný způsob jak řídicí rovnice odvodit. Každému je ze základních kurzů fyziky znám pojem energie. Jedná se o funkcionál, který jedním skalárem (číslem) popisuje systém jako celek a ze všem možných stavů systém zaujímá ten s nejnižší energií. Pojďme si ukázat, že slabá forma je s energetickou metodou silně provázaná.

Pro tyto účely bude potřeba sestavit energetický funkcionál pro představený fyzikální systém. Energie našeho mechanického systému je rovna součtu vnitřní a vnější energie. Vnější energie je rovna práci vnějších sil, tedy

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} = F(x)u(x)|_{\Gamma_f} + \int_0^L f(x)u(x) dx, \quad (2.35)$$

kde první člen je práce vnější síly $F(x)$ na posunu $u(x)$ realizovaném v tomto bodě. Omezení $|_{\Gamma_f}$ je zde jen formálně a poukazuje na to, že tento člen vyčíslujeme jen v bodech $x \in \Gamma_f$. Podobně práce spojitých sil $f(x)$ pracuje na posunech $u(x)$, zatížení je ale spojitě po celém prutu, proto je nutné práci nasčítat (zintegrovat) přes délku prutu. Práce vnitřních sil je naakumulovaná elastická energie, která má tvar

$$\mathcal{E}_{\text{int}} = \int_0^L \frac{1}{2} \sigma(x) \varepsilon(x) dx, \quad (2.36)$$

kde napětí pracuje na deformacích. Jak bylo uvedeno dříve, platí $\sigma = E\varepsilon$ a $\varepsilon = u'$ a proto pro energii vnitřních sil dostáváme

$$\mathcal{E}_{\text{int}} = \int_0^L \frac{1}{2} EA (u'(x))^2 dx. \quad (2.37)$$

Celková energie je tedy dáva jejich součtem jako

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ext}} + \mathcal{E}_{\text{int}} = \int_0^L \frac{1}{2} EA (u'(x))^2 dx + F(x)u(x)|_{\Gamma_f} + \int_0^L f(x)u(x) dx. \quad (2.38)$$

Dle principu minimalizace energie se realizuje takový posun $u(x)$, aby uvedený energetický funkcionál byl minimální. Při hledání lokálního extrému funkce je zapotřebí funkci zderivovat a hledat taková místa, kde je ona derivace rovna nule. V případě funkcionálu nelze derivovat podle funkce. Zavádíme pojem variace, kdy původní funkci $u(x)$ lehce modifikujeme. Původní funkci $u(x)$ nahradíme funkcí

$$u(x) + h \cdot w(x), \quad (2.39)$$

kde h je malá skalární veličina a $w(x)$ je zvolená perturbace (chcete-li směr, kterým funkci měníme). Pokud je např. w konstanta, potom celému nosníku přidáte navíc malý konstantní posun. Pozor ale na okrajové podmínky. V bodech, kde je posun předepsán, je posun plně determinován a jeho variace nedává smysl. V našem případě tedy musí platit $w(x) = 0|_{\Gamma_u}$. Pro danou testovací funkci (směr změny) lze potom perturbovanou energii

$$\mathcal{E}(h, u, w) = \frac{1}{2} \int_0^L EA (u' + hw')^2 dx + \int_0^L (u + hw) f dx + F(u + hw)|_{\Gamma_f} \quad (2.40)$$

vnímat jako skalární funkci proměnné h . Tuto funkci tedy můžeme derivovat jako klasickou funkci a vyčíslit v bodě $h = 0$. Tím získáme změnu energie při nekonečně malé změně parametru h . Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{E}(h, u, \delta u)}{\partial h} \right|_{h=0} &= \frac{1}{2} \int_0^L EA (2u'w' + 2hw^2) dx \Big|_{h=0} + \int_0^L wf dx + Fw|_{\Gamma_f} \\ &= \int_0^L EAu'\delta u' dx + \int_0^L \delta u f dx + Fw|_{\Gamma_f} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Tento výraz označujeme jako první variaci funkcionálu pro danou testovací funkci w . Podobně jako v klasické matematické analýze platí, že funkcionál nabývá svého lokálního extrému, pokud jeho variace je rovna nule. Nestačí ale, aby funkcionál nabýval extrému pro jednu konkrétní testovací funkci, ale požadujeme přísnější podmínku - nulovost výrazu musí platit pro libovolně zvolenou testovací funkci. Extremální podmínka tedy zní

$$\int_0^L EAu'w' dx + \int_0^L wf dx + Fw|_{\Gamma_f} = 0, \quad \forall w, \quad (2.42)$$

což je stejná rovnice jako byla odvozena výše, tedy slabá formulace.

Je vidět, že energetická (variační) formulace vede přirozeně na slabou formu. Slabá forma tedy není jen umělým konstruktem, ale stále je zakořeněna fundamentálně v konzervativních systémech a přirozeně se vyskytuje při aplikaci energetických metod.

2.6 Metody vážených reziduí

Pro účely této sekce je vhodné všechny členy diferenciální rovnice přeházet na levou stranu a celou tuto levou stranu označit jako $R(x)$. Této veličině říkáme reziduum

$$R(x) = EAu''(x) + f(x). \quad (2.43)$$

Pokud známe přesné řešení diferenciální rovnice je jeho reziduum rovno nule, nicméně pokud řešení není úplně přesné, potom se je $R(x)$ kvantita, která říká jak moc není řešení přesné. Po přenásobení váhovou funkcí a integraci po celé doméně dostáváme integrální rovnici

$$\int_0^L w(x)R(x) dx = 0, \quad (2.44)$$

což lze interpretovat jako vážený průměr reziduí. To je také důvod, proč numerickým metodám založeným na diskretizaci takové rovnice říkáme **metody vážených reziduí**. Lze to vnímat tak, že hledáme přibližné řešení, které nemá nulové reziduum, ale jehož reziduum je nula alespoň v průměru.

Představme nyní v rychlosti 3 metody založené na této formulaci. Předpokládáme, že se nedaří nalézt přesné řešení a proto je potřeba hledat přibližné řešení a ve všech třech případech lze uvažovat, že hledáme přibližné řešení ve tvaru

$$u(x) \approx u_p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x), \quad (2.45)$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry, zatímco $N_i(x)$ jsou předem zvolené funkce, které co nejlépe vystihují náš fyzikální systém, říkáme jim *bázové funkce*. Residuum je tedy funkcí aproximační funkce, tedy $R(u_p)$. V tuto chvíli není podstatné jak funkce N_i vypadají nebo jak je hledáme, o tom více později. Nyní je potřeba nějakým způsobem spočítat volné parametry α_i a tomu potřebujeme n příslušných rovnic, kde v každé z rovnic může vystupovat jiná váhová funkce. Předpokládejme tedy, že i váhové funkce $w_i(x)$ budou indexované a mohou být různé.

Metoda kolokací

V metodě kolokací předpokládáme, že váhové funkce pokládáme rovny diracově delta funkci $\delta(x)$. Diracova delta funkce není funkce v pravém smyslu slova (jedná se o tzv. distribuci), ale má následující hezkou vlastnost

$$\int \delta(a)f(x) dx = f(a). \quad (2.46)$$

Řekněme, že těchto delta funkcí zvolíme více a to v bodech a_1, a_2, \dots, a_n a tedy naše rovnice vážených reziduí se stane

$$R(a_i) = 0, \quad \forall i. \quad (2.47)$$

Váhových funkcí bude tedy n , stejné množství bude rovnic a díky těmto rovnicím potom nalezneme neznámé parametry α_i .

Co to znamená? Jednoduše to, že hledáme parametry α_i takové, že residuum nulujeme pouze ve vybraných bodech, resp. že diferenciální rovnice je splněna přesně jen v předem zvolených bodech. Co se děje v ostatních částech prutu nás nezajímá.

Metoda nejmenších čtverců

Vycházíme z předpokladu, že minimalizujeme integrální kvadrát reziduí, neboli minimalizujeme výraz

$$S(x) = \int_0^L R^2(x) dx. \quad (2.48)$$

Chceme tedy, aby kvadrát reziduí byl co nejmenší, stejně jako v klasické metodě nejmenších čtverců. Zde minimalizujeme podle hledaných parametrů, tedy

hledáme takové α_i , aby reziduum diferenciální rovnice bylo v tomto smyslu minimální. Podmínky optimality jsou tedy derivace podle α_i položené rovno nule, tedy

$$\frac{\partial S(x)}{\partial \alpha_i} = 2 \int_0^L R(x) \frac{\partial R(x)}{\partial \alpha_i} dx = 0. \quad (2.49)$$

Jedná se opět o n rovnic pro nalezení n parametrů α_i . Při porovnání s námi představenou slabou formou je vidět, že metodu nejmenších čtverců dostáváme v případě, kdy za váhovou funkci volíme

$$w_i = \frac{\partial R(x)}{\partial \alpha_i}. \quad (2.50)$$

Tedy opravdu volba takové váhové funkce je ekvivalentní s minimalizací kvadrátu rezidua. Ztratila se nám akorát konstanta 2, ale ta není při minimalizaci podstatná. Minimalizace $f(x)$ a $2f(x)$ vede na tentýž minimalizační bod x .

Galerkinova metoda

Další velmi známá metoda je metoda Galerkinova, kde jako váhové funkce volíme $w_i = \frac{\partial u_p(x)}{\partial \alpha_i} = N_i(x)$, tedy derivujeme přímo aproximační řadu. Naše soustava pro nalezení hledaných α_i je potom tvaru

$$\int_0^L R(u_p) N_i(x) dx, \quad \forall i, \quad (2.51)$$

pro náš případ taženého/tlačeného prutu přímo

$$- \int_0^L (u_p''(x) N_i(x) + f(x) N_i(x)) dx, \quad \forall i, \quad (2.52)$$

Navíc je vhodné si uvědomit, že funkci u_p derivujeme podle x dvakrát, tedy uvnitř derivujeme funkce N_i dvakrát. Zatímco váhovou funkci ani jednou. Je proto vhodné opět využít per partes a jednu derivaci přenést na váhovou funkci. S uvažováním, že váhové funkce se nulují na obou okrajích tyče dostáváme přímo

$$\int_0^L (u_p'(x) N_i'(x) - f(x) N_i(x)) dx, \quad \forall i. \quad (2.53)$$

Těchto rovnic je opět n a vedou na nalezení neznámých parametrů α_i . Přímo na tomto principu je založená i metoda konečných prvků, což spolu prozkoumáme v následující kapitole.

2.7 Slabá derivace - Jen dočasné umístění

V předešlé sekci bylo ukázáno, že při řešení rovnic v silné formě bývá problém s členy, které nemají klasickou derivaci v každém bodě vyšetřované domény.

Vzhledem k tomu se jeví výhodné zavést zobecnění pojmu derivace, kterému říkáme **slabá derivace**. Definice je následující - říkáme, že v je slabou derivací u pokud platí

$$\int_a^b u(t)\xi'(t) dt = - \int_a^b v(t)\xi(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{C}^\infty(\langle a, b \rangle), \quad (2.54)$$

kde navíc vynucujeme $\xi(a) = \xi(b) = 0$. Tato definice zobecněné derivace se může zdát příliš umělá nebo složitá. Lze ale ukázat, že vede na funkce, kterou jsou pro nás inženýrsky přirozené. Vezměme např. funkci $u(t) = |t|$. Tu lze rovnou dosadit na levou stranu a upravit per partes. Dostáváme

$$\int_a^b u(t)\xi'(t) dt = [|t|\xi(t)]_a^b - \int_a^b (|t|)'(t)\xi(t) dt = - \int_a^b \hat{H}(t)\xi(t) dt, \quad (2.55)$$

kde jsme při vyčíslení okrajového členu využili, že $\xi(a) = \xi(b) = 0$ a zavedli jsme funkci \hat{H} , což je upravená Heavisidova funkce. Ta je definována následovně

$$\hat{H} = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1 & t < 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Jedná se o klasickou definici Heavisidovy funkce $H(t)$ s tím rozdílem, že naše verze $\hat{H}(t)$ není definována v počátku. Porovnáním poslední rovnice s definicí slabé derivace zjišťujeme, že slabou derivací funkce $f(t) = |t|$ je funkce $\hat{H}(t)$. Je potřeba podotknout, že funkce $f(t)$ měla za definiční obor \mathbb{R} , zatímco \hat{H} není v počátku definována, naše získaná slabá derivace je tedy shodná s klasickou derivací. Proč tedy zavádět pojem slabé derivace? Právě proto, že vzhledem k integrální definici slabé derivace, lze derivaci libovolně dodefinovat v počátku. Výsledek integrace se tím nezmění. Naši novou definici derivace nyní splňuje i funkce \hat{H} s dodefinovanou hodnotou $\hat{H}(0) = 1$. Stejně tak lze dodefinovat funkci hodnotou $\hat{H}(0) = -1$, nebo jiným reálným číslem. Integrální rovnost bude zachována.

Kapitola 3

Metoda konečných prvků