Sylabus

Vektory a matice, operace s vektory, lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost, operace s maticemi, hodnost matice (i s parametrem). Soustavy lin. algebraických rovnic. Frobeniova věta.

Příklady

1. Spočtěte:

   (a) $(2,3,4) + (-4,-3,-2)$
   (b) $(1,1,4) \cdot (0,1,3)$
   (c) $5(1,0,2)$
   (d) $-(-3,4,5) - (-1,-1,0)$
   (e) $-2(4,-1,0)$
   (f) $(0,0,0) \cdot (1,2,3)$

2. Rozhodněte, zda je systém vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně závislý:

   (a) $\boldsymbol{v}_1 = (7,3,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,0,4), \boldsymbol{v}_3 = (3,0,12)$
   (b) $\boldsymbol{v}_1 = (2,2,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,2,3), \boldsymbol{v}_3 = (0,0,0)$
   (c) $\boldsymbol{v}_1 = (2,2,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,2,3), \boldsymbol{v}_3 = (4,4,2)$
   (d) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,3,0), \boldsymbol{v}_3 = (0,0,-2)$

3. Spočtěte:

   (a) $3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

4. Mějme matice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Spočtěte:

   (a) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$
   (b) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}^\top$
   (c) $\mathrm{B} \cdot \mathrm{C}$
   (d) $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$
   (e) $\mathrm{C} \cdot \mathrm{D}$
   (f) $\mathrm{C}^\top \cdot \mathrm{D}$

5. Určete hodnost matice:

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -6 & 1 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
   (g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:

   (a) $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0), \boldsymbol{v}_2 = (1,-1,2),$
   $\boldsymbol{v}_3 = (0,3,4), \boldsymbol{v}_4 = (0,0,8)$

   (b) $\boldsymbol{v}_1 = (5,5), \boldsymbol{v}_2 = (1,1),$
   $\boldsymbol{v}_3 = (0,1), \boldsymbol{v}_4 = (5,3)$

7. Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametrů $k \in \mathbb{R}$ jsou zadané množiny vektorů LZ/LN:

   (a) $\boldsymbol{v}_1 = (2,0,1), \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0),$
   $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,k)$

   (b) $\boldsymbol{v}_1 = (3,8), \boldsymbol{v}_2 = (k,0)$

   (c) $\boldsymbol{v}_1 = (3,8), \boldsymbol{v}_2 = (k,1)$

   (d) $\boldsymbol{v}_1 = (3,8,k), \boldsymbol{v}_2 = (k,0,0),$
   $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,1), \boldsymbol{v}_4 = (0,k,3)$

8. Určete hodnost matice v závislosti na parametru $k \in \mathbb{R}$:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & -2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

9. Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic:

   (a) $x + z = 2$
   $y - z = 2$
   $x + y = 4$

   (b) $-2x + y + z = -2$
   $x + y - z = -2$
   $2y + z = 1$

   (c) $2x + y + 2z + 3t = 1$
   $4x + 2y + 3z - 2t = 2$
   $6x + 3y + 7z + 17t = 8$

   (d) $-2x + 3y + z = 0$
   $x - y - z = 4$
   $-x + 2y = 4$

10. Rešte soustavu rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$