

Phase-field model poškození

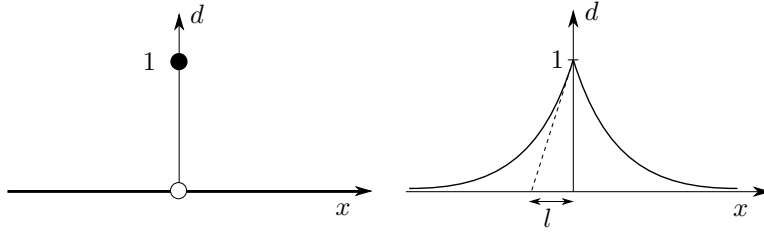
J. Schmidt

Datum poslední aktualizace: 6. února 2024

Text je zatím jen souhrn poznámek a nemá dostatečnou koherenci. Některé odstavce jsou plně popsány, jinde jsou rovnice uvedeny bez poznámek a jinde chybí třeba doplnit obrázky. Časem budou nejasné odstavce přepsány a do nutných míst doplněny obrázky nebo text.

Obsah

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Představení modelu | 3 |
| 2 | Obecný model pro kontinuum | 4 |
| 3 | Analytické řešení | 7 |
| 3.1 | Model Bourdin, $\alpha = d^2$ | 7 |
| 3.2 | Model Pham, $\alpha = d$ | 8 |
| 4 | Numerická simulace modelu | 9 |
| 5 | Fragmentace | 9 |
| 6 | Model PHAM | 9 |



Obrázek 1: Rozetření singulární trhliny (vlevo) omocí spojitě exponenciální funkce (vpravo). Hodnota $d = 0$ představuje nepoškozený materiál, zatímco $d = 1$ je plně poškozený materiál.

1 Představení modelu

Jedná se o energetickou metodu v tom smyslu, že trhlina a její vývoj je řízen minimalizací nějakého energetického funkcionálu. Pravidla o rozvoji trhliny jsou zakomponována přímo v energii systému. Následující myšlenky a odvození jsou převzaty zejména z [?] a [?].

Mohli bychom zde rovnou uvést obecné rovnice tohoto modelu a analyzovat jeho vlastnosti. Pojdme na to jít chvilku z druhé strany a pokusme se energetický funkcionál pro trhlinu, nebo jeho část, odvodit. Nějakou chvíli budeme pracovat s jednoduchým jednorozměrným případem a odvozovat tedy rovnice, které závisejí jen na jedné pořadnici x . Zobecnění pro 3D provedeme později a sami uvidíte, že ono zobecnění bude relativně přímočaré. Pro takové účely je velmi vhodný akademický prut nekonečné délky o průřezové ploše A . Bez ztráty obecnosti můžeme dokonce uvažovat $A = 1$. Vyšetřovaná doména je potom $x \in \mathbb{R}$. Pokud v materiálu v místě $x = 0$ vznikne dokonalá trhlina, potom se jedná matematicky o singularitu a práce s ní je velmi obtížná. Takový typ trhliny je zaznačen v obrázku 1 vlevo, kde je zavedeno nové pole $d(x)$. Jedná se o fázovou veličinu, kdy $d = 0$ představuje neporušený materiál a $d = 1$ představuje plně poškozený materiál. Lze na ni tedy nahlížet jako na relativní poškození.

Taková trhlina je není vzhledem ke svému singulárnímu charakteru dobře numericky uchopitelná, proto se ukazuje vhodnější její rozetření, resp. aproximace nějakou spojitou funkcí, viz obrázek 1 vpravo. V tom případě už neuvažujeme jen stavy $d = 0$ a $d = 1$, ale i všechny mezilehlé hodnoty jsou přípustné, tedy $d \in \langle 0, 1 \rangle$. Jedna z vhodných funkcí, kterou můžeme pro aproximaci použít je

$$d(x) = e^{-|x|/\ell}, \quad (1)$$

kde parametr ℓ řídí regularizaci a $\ell \rightarrow 0$ limitně obnovuje nespojitě chování. Výslednou funkci poškození máme zavedenou, nyní je nutné ovšem odvodit energetický systém, který takovou funkci generuje.

Stanovený takového systému není jednoznačné. Pojdme a priori předpokládat, že náš funkcionál nebude závislý jen na poli poškození d , ale i na jeho první derivaci. Bude se tedy jednat o nelokální model. V tom případě musí být řídicí rovnice (silná forma) druhého řádu. Jinými slovy, hledáme rovnici druhého řádu,

kteřá má za řešení naši funkci (1). Není těžké nahlédnout, že hledaná diferenciální řídicí rovnice musí být následující

$$d(x) - \ell^2 d''(x) = 0. \quad (2)$$

V energetických (chcete-li variačních) přístupech jsou řídicí rovnice získány z prvotního funkcionálu minimalizací, zde vzhledem k d . Pro splnění takového požadavku se dostáváme k hledanému funkcionálu $I(d)$, který má tvar

$$I(d) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 + \ell^2 d'^2 dx. \quad (3)$$

Odvodili jsme tedy funkcionál, jehož minimalizací dostáváme řídicí rovnici, jejíž řešením je rozetřená trhlina definována funkcí $d(x)$, tedy matematicky

$$e^{-|x|/\ell} = \arg \min I(d(x)). \quad (4)$$

Než postoupíme dále, je velmi důležité si uvědomit pár drobností. Pokud bychom uvažovali prut s plochou $A \neq 1$, pak by funkcionál byl navíc přenásobem plochou A . Navíc libovolný násobek funkcionálu $cI(d)$, kde $c \in \mathbb{R}$, je ekvivalentní s naší úlohou a jeho minimalizací stále dostáváme řešení regularizované trhliny (1). Otázkou je, zda může být tato konstanta libovolná.

Pokud dosadíme funkci (1) do funkcionálu $I(d)$ a vyčíslíme, dostáváme $I(e^{-|x|/\ell}) = \ell$. To by obecně nevalilo, ale nebylo by tak snadné systém fyzikálně interpretovat. Pokud ale funkcionál $I(d)$ přenásobíme $1/\ell$, potom ho lze interpretovat jako aproximaci plochy trhliny, která je zde jednotková. Po přenásobení dostáváme tedy nově definovaný funkcionál

$$\gamma(d) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 + \ell^2 d'^2 dx, \quad (5)$$

který už můžeme navíc fyzikálně interpretovat jako spojitou aproximaci plochy trhliny.

2 Obecný model pro kontinuum

Výše jsme si tedy odvodili řídicí funkcionál, který se nám navíc podařilo fyzikálně interpretovat. Tato interpretace ale není dostatečně obecná, protože pouze říká, co značí funkcionál, jehož minimalizací získáme pole poškození. Otázkou zůstává, jak vložit tyto úvahy do kontextu mechaniky kontinua pro správnou odezvu systému. Využijeme k tomu nově definovanou funkci $\gamma(d)$.

Nejprve se se přesuňme na na lehce konkrétnější, méně akademický, případ. Uvažujme tažený/tlačený prut délky L , který je v místě $x = 0$ připevněn a v místě $x = L$ je předepisován posun [TODO: Doplnit obrázek]. Jeho mechanika je potom popsána dvojicí funkcí: polem posunů $u(x)$ a polem poškození $d(x)$. Naši okrajovou podmínku lze pak přepsat jako $u(0) = 0$ a $u(L) = \bar{u}$. Uvažujme pro jednoduchost, že předepsaný posun je $\bar{u} = tL$, kde $t \in \mathbb{R}$ je monotónně

rostoucí parametr. Tato okrajová podmínka je volena, protože indukuje v prutu konstantní pole deformace, které je rovno přímo t . Pokud bychom předpokládali, že v materiálu vznikne ostrá trhlina, potom lze energii systému popsat tzv. Griffithovým energetickým funkcioálem, který popisuje takový systém. Elegantní funkcioál, který je ale velmi špatně použitelný pro numeriku vzhledem ke svému nespojitému charakteru. Pro obecné elastické poškoditelné kontinuum je tento funkcioál roven

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \psi(\mathbf{u}) \, dV + G_f \int_{\Gamma} \, dS. \quad (6)$$

Zde ψ je hustota elastické energie, která je integrována všude až na výjimku bodů $\mathbf{x} \in \Gamma$, kde Γ představuje topologii trhliny. Geometricky to znamená, že v těchto bodech je umožněna skoková změna elastické energie. Druhý člen představuje disipovanou energii, která je rovna lomové houževnatosti G_f vynásobené plochou vzniklé trhliny. Tuto plochu zde reprezentuje právě člen $\int_{\Gamma} \, dS$. Chování systému je následně řízeno minimalizací takového funkcioálu. Trhlina se rozšíří právě tehdy, když je disipovaná energie nově vzniklé trhliny nižší než změna elastické energie systému. Základní myšlenka phase-field modelu poškození je matematická regularizace disipativního členu, tedy zejména regularizace plochy trhliny. S výše zavedenou plochou $\gamma(d)$ tedy dostáváme

$$G_f \int_{\Gamma} \, dS \approx G_f \gamma(d). \quad (7)$$

Pojďme ještě diskutovat elastický člen. V našem případě se jedná o tažený/tlačený prut, jehož uložená energie je v případě čisté elasticity rovna $\int \frac{1}{2} E u'^2 \, dx$. Nicméně v případě modelu s poškozením je potřeba změnit tuhost systému vzhledem k vyvíjející se trhlíně. V místě, kde se poškození blíží jedné, musí tuhost klesat k nule. K tomu účelu zavádíme tzv. degradační funkci následujícím multiplikačním způsobem

$$\int_0^L \frac{1}{2} g(d) E u'^2 \, dx. \quad (8)$$

Obě ingredience modelu máme představeny, proto můžeme již směle sestavit celkový energetický funkcioál systému jako

$$\mathcal{E}(d) = \int_0^L \frac{1}{2} g(d) E u'^2 \, dx + \frac{G_f}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{\ell} d^2 + \ell d'^2 \right) \, dx. \quad (9)$$

Tedy námi dříve představený funkcioál $\gamma(d)$ bylo ještě nutné přenásobit lomovou houževnatostí pro vhodnou fyzikální interpretaci. Provázanost posunů s poškozením je skrze degradační funkci $g(d)$.

Vše co bylo představeno je založeno na námi adhoc vybrané funkci (1), která může být ovšem volena libovolně jinak a takových systémů lze odvodit více. Nebudeme tyto úvahy dělat pro více funkcí $d(x)$, místo toho na tomto místě

uvedeme dnes uznávané zobecnění a v následující kapitole vyšetříme analyticky chování jednotlivých modelů. Toto zobecnění nabývá tvaru

$$\mathcal{E}(d) = \int_0^L \frac{1}{2}g(d)Eu'^2 dx + \underbrace{\frac{G_f}{c_\alpha} \int_0^L \left(\frac{1}{\ell}\alpha(d) + \ell d'^2 \right) dx}_{\gamma G_f}, \quad (10)$$

kde $g(d)$ a $\alpha(d)$ jsou 2 funkce, které řídí chování systému. Parametr c_α je pouhou konstantou, která musí být volena tak, aby druhý integrál stále představoval aproximaci disipovaného členu. Tedy hledáme c_α takové, aby integrál

$$\frac{1}{c_\alpha} \int_0^L \left(\frac{1}{\ell}\alpha(d) + \ell d'^2 \right) dx \quad (11)$$

stále aproximoval plochu trhliny, v našem případě se rovnal jedné. Můžeme vyjít ze silné formy, tedy z řídicí rovnice, kterou dostaneme po minimalizaci vzhledem k d . Dostáváme podobnou rovnici jako byla (2), jen v tomto obecnějším případě nabývá tvaru

$$\alpha'(d(x)) - 2\ell^2 d''(x) = 0. \quad (12)$$

Přenásobením $d'(x)$ a zintegrováním dostaneme upravený tvar

$$\alpha(d(x)) - \ell^2 d'^2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad d'(x) = \frac{1}{\ell} \sqrt{\alpha(d(x))}. \quad (13)$$

Resp. zderivováním (13) podle x dostáváme (12), tedy obě rovnosti jsou až na konstantu ekvivalentní. Nyní můžeme výraz $\ell d'^2$ z (13) dosadit do (10) a vypočítat celkovou plochu trhliny. Ze zjednodušujících důvodů uvažujme integraci jen přes $x \in \langle 0, \hat{x} \rangle$, kde \hat{x} je místo v kterém vznikla trhlinka. Odhadovaná plocha trhliny pak není 1, ale $\frac{1}{2}$. Pro naši konstantu c_α tedy požadujeme aby platilo

$$\frac{1}{c_\alpha} \int_0^{\hat{x}} \frac{2}{\ell} \alpha(d) dx = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Už máme prakticky hotovo, posledním krokem bude změna integrace z dx na dd . S použitím (13) a s vědomím, že $dx = d'(x) dd$ dostáváme konečný vztah

$$c_\alpha = 4 \int_0^1 \sqrt{\alpha(d)} dd. \quad (15)$$

Záměnou integračních domén došlo i k záměně integračních mezí. Přirozeně nastává otázka, zda v místě $x = 0$ je opravdu pole poškození nulové. Vskutku hned naše aproximační funkce (1) nabývá nulové hodnoty jen v nekonečných vzdálenostech. Nicméně s klesajícím ℓ je tento předpoklad čím dál více reálný a pro různé volby α je splněn přesně i pro velká ℓ .

3 Analytické řešení

V této sekci sumarizujeme známé analytické vzorce pro některé hojně používané modely. Jak již bylo zmíněno, řídicí rovnice můžeme odvodit minimalizací funkcionálu vzhledem k proměnným $u(x)$ a $d(x)$, resp. první variace vzhledem k obou funkcím musí být nulová. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}(\delta u, \delta d) = & \int_0^L g(d)Eu'\delta u' dx + \frac{1}{2} \int_0^L g'(d)Eu'^2\delta d dx + \\ & + \frac{G_f}{c_\alpha} \int_0^L \left(\frac{1}{\ell}\alpha'(d)\delta d + \ell d'\delta d' \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3.1 Model Bourdin, $\alpha = d^2$

Tento model získáme uvažováním $\alpha(d) = d^2$, $g(d) = (1-d)^2$. Navíc nám vychází konstanta $c_\alpha = 2$.

Vyřešení takového problému není triviální, pojďme proto vyšetřovat prozatím tzv. homogenní řešení. Pokud se totiž podíváme na rovnice pro pole posunů u , je vidět, že legitimní je řešení v kterém je v celém prutu homogenní napěťové pole, tedy

$$u'(x) = t, u(x) = tx, \sigma = tE(1-d)^2. \quad (17)$$

Veličina σ tady neoznačuje skutečné napětí, ale pouze nominální napětí. Pokud je v prutu konstantní napěťový stav, mělo by se i pole deformace vyvíjet konstantně (zanedlouho uvidíme, že to tak úplně neplatí), můžeme tedy zkusit předpokládat konstantní pole poškození, tedy $d'(x) = 0$. Kritérium pro vývoj poškození získaný z první variace je potom rovno

$$-(1-d)Et^2 + \frac{G_f}{\ell}d \geq 0, \quad \dot{d} \left(-2(1-d)Et^2 + \frac{G_f}{\ell}d \right) = 0 \quad (18)$$

Z tohoto kritéria je okamžitě možné získat vztah mezi polem napětí σ a polem poškození d jako

$$\sigma(d) = \sqrt{\frac{G_f}{\ell}dE(1-d)^3}. \quad (19)$$

Pojďme se podívat, jakého maximálního nominálního napětí náš prut dosáhne. Extremálnost funkce $\sigma(d)$ získáme jednoduše derivací podle d . Poloha extrému nezávisí na ostatních parametrech a nastává vždy pro $d = \frac{1}{4}$. Hodnota tohoto napětí je potom rovna

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{G_f E}{\ell}}. \quad (20)$$

Je opět zajímavé zkoumat, co z tohoto výsledku plyne. Je možná překvapující, že pokud $\ell \rightarrow 0$, potom maximální napětí roste nade všechny meze. Resp. obráceně,

pro vznik trhliny je potřeba nekonečně napětí. To je ovšem v souladu s lineární lomovou mechanikou, která předpovídá totéž a taktéž je založena na ekvivalentním energetickém principu. Jedna z možných interpretací je dívat se na ℓ jako na materiálový parametr. Pokud známe pevnost v tahu σ_{\max} daného materiálu a taktéž jeho lomovou houževnatost G_f , potom je parametr ℓ z tohoto tahového testu dán jednoznačně. Jinými slovy vnímáme singulární trhlinu jen jako teoretický pojem a na každou trhlinu se díváme jako na duktilní. Z výsledku je také patrné, že odezva je stále stejná, pokud držíme podíl G_f/ℓ konstantní.

Z výše uvedených vztahů lze algebraickými úpravami dostat i závislost homogenního poškození pro daný pseudočas t , dostáváme

$$d(t) = \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}^2 + 3u_{\max}^2}, \quad (21)$$

kde u_{\max} je předepsaný posun vedoucí na maximální napětí, platí

$$u_{\max} = \frac{16\sigma_{\max}L}{9E}. \quad (22)$$

Nakonec dostáváme vztah mezi výsledným napětím a předepsaným posunem jako

$$\sigma(t) = E \frac{9u_{\max}^4}{(\bar{u}^2 + 3u_{\max}^2)^2} \frac{\bar{u}}{L}. \quad (23)$$

Kromě výsledného řešení je vhodné vyšetřovat také stabilitu tohoto řešení. Když je stabilita narušena, může dojít k preferenci řešení s lokalizací pole poškození do jednoho místa. Toto řešení poté není homogenní a pole $d'(x)$ už není nulové. Stabilitu lze vyšetřit z druhé variace energetického funkcionálu vzhledem k d . Pro druhou variaci získáváme následující tvar

$$\delta^2 \mathcal{E} = \int_0^L g(d) E \delta u'^2 dx + \int_0^L g''(d) E u'^2 \delta d^2 dx + G_f \int_0^L \left(\frac{1}{l} \delta d^2 + l \delta d'^2 \right) dx \quad (24)$$

Podle znaménka tohoto výrazu lze usuzovat o stabilitě. Stabilní řešení má druhou variaci kladnou, zatímco nestabilní řešení má druhou variaci zápornou. Kritérium stability plynoucí z těchto úvah lze matematicky zapsat jako

$$\frac{L}{\ell} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \frac{\bar{u}^2/u_{\max}^2}{(\bar{u}^2/u_{\max}^2 - 1)^{3/2}}. \quad (25)$$

3.2 Model Pham, $\alpha = d$

Tento model získáme uvažováním $\alpha(d) = d, g(d) = (1-d)^2$. Navíc nám vychází konstanta $c_\alpha = \frac{8}{3}$.

Kritérium poškození není oproti předchozímu modelu aktivováno ihned od začátku zatěžování a odezva je nějaký čas elastická. Jinými slovy z kritéria

poškození

$$-(1-d)Et^2 + \frac{G_f}{\ell}d \geq 0, \quad \dot{d} \left(-2(1-d)Et^2 + \frac{3G_f}{8\ell} \right) = 0 \quad (26)$$

vychází nějaký čas záporné pole d a poškození se začne v doméně vyvíjet až ve chvíli, kdy z kritéria plyne $d > 0$. Připomeňme, že kritérium je stanoveno pro homogenní odezvu poškození, tedy pro případ, že $d' = 0$. Z kritéria plyne, že

$$d \quad (27)$$

4 Numerická simulace modelu

5 Fragmentace

6 Model PHAM

[Pouze souhr základních rovnic řešení]

Další možný model je následující

$$\mathcal{E}(d) = \int_0^L \frac{1}{2}g(d)Eu'^2 dx + \frac{3G_f}{8} \int_0^L \left(\frac{1}{\ell}d + \ell d'^2 \right) dx. \quad (28)$$

Jeho slabá forma je víceméně stejná, až na jeden člen, tedy

$$\delta\mathcal{E}(\delta u, \delta d) = \int_0^L g(d)Eu'\delta u' dx + \frac{1}{2} \int_0^L g'(d)Eu'^2\delta d dx + \frac{3}{8}G_f \int_0^L \left(\frac{1}{\ell}\delta d + 2\ell d'\delta d' \right) dx = 0. \quad (29)$$

Do určitého okamžiku je odezva čistě elastická, až do okamžiku maximálního napětí

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{G}{\ell}}E, \quad (30)$$

které nastává pro předepsaný posun

$$u_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}L \quad (31)$$