Obyčejné diferenciální rovnice

J. Schmidt

Datum poslední aktualizace: 6. února 2024

Text je zatím jen souhrn poznámek a nemá dostatečnou koherenci. Některé odstavce jsou plně popsány, jinde jsou rovnice uvedeny bez poznámek a jinde chybí třeba doplnit obrázky. Časem budou nejasné odstavce přepsány a do nutných míst doplněny obrázky nebo text.

Obsah

1 Úvod

Diferenciální rovnice hrají v životě inženýra nezastupitelnou roli. Ukazuje se, že ve fyzikálním světě nejsou veličin závislé jen jedna na druhé, ale jsou závislé i s ohledem na rychlost změny dané veličiny. Přirozeně se poté v popisu objevují derivace a rovnice popisující systém se stávají diferenciálními.

Předpokládáme, že čtenář se s diferenciálními rovnicemi již potkal, přesto je didakticky vhodnější pokračovat za předpokladu nulových předchozích znalostí. Text se pak stává i přehlednější, systematičtější a možná kompaktnější.

Předchozí znalosti nejsou nutné, přesto je vhodné, pokud čtenář už nějaké rovnice tohoto typu potkal. Zejména úvodní část je poněkud povrchní a výklad cílí spíše na přesun na zajímavější teorie a také jejich nedostatky.

Jako většina textů na diferenciální rovnice i my začneme nejprve klasifikací. Ta je důležitá zejména proto, aby čtenář dokázal vytušit jaké metody zvolit pro jejich řešení. Jednotlivé případy budou posléze v jednotlivých sekcích představeny s jejich kvalitativním i kvantitativním způsobem řešení. V této kapitole je kladen důraz na analtické řešení, numerické způsoby řešení jsou potom představeny v kapitole ?

Diferenciální rovnice. Pojďme v první řadě zkoumat jedinou rovnici, rozšíření na soustavu rovnic je relativně přímočaré a je provedeno později. Diferenciální rovnice je rovnice, v které hledaná neznámá struktura je matematická funkce a vystupují zde kromě funkce samotné i její derivace. Příkladem takové diferenciální rovnice může být třeba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1}$$

kde vystupuje nezmámá funkce $u(x, y, t)$ a její parciální derivace 2. řádu. V dalším textu předpokládejme pro jdednoduchost, že hledaná funkce je pouze funkcí prostorových souřadnic x, y, z a časové proměnné t. Rozšíření na libovolný jiný systém je bezproblémový.

Obecně zde neznámá funkce funkce může vystupovat i libovolné formě - můžeme zde potkat součiny funkcí a jejich derivací, logaritmy a jakékoliv jiné matematické struktury. Pro další klasifikaci je vhodné zavést formální tvar takové rovnice. Můžeme abstraktně psát

$$F(u(x, y, z, t)) = g(x, y, z, t), \tag{2}$$

kde $F(u)$ může obsahovat samotnou funkci u i její derivace, zatímco pravá strana je pouze funkcí prostorových a časové proměnné, ale není zde žádná závislost na naší hedané funkci. Pokud je pravá strana takové rovnice nulová, potom diferenciální rovnici nazýváme **homogenní**, v opačném případě se jedná o **nehomogenní** rovnici.

Řád rovnice. Řád je jednoduše skalární číslo, které označuje nejvyšší derivaci, která se v rovnicích objevuje. V případě výše uvedeného příkladu se jedná tedy o diferenciální rovnici 2. řádu.

Obyčejné a parciální a diferenciální rovnice. Další důležité rozlišení je na parciální a obyčejné diferenciání rovnice. Pojem obyčejná diferenciální rovnice (zkracujeme ODR) označuje rovnici, kde se vyskytuje pouze funkce jedné nezávislé proměnné a její derivace, tedy naše hledaná funkce $u(x)$ už závisí jen na jedné pořadnici, např. x. Zatímco parciální diferenciální rovnice (zkracujeme PDR) jsou rovnice s funkcí více proměnných a jejími derivacemi. Toto rozlišení není jen lingvistické, ale zásadně rozděluje způsob přístupu k řešení rovnic. Tyto typy jsou v dalším textu vyšetřovány zvlášť, každá jiným způsobem. Pro úplnost - výše uvedená rovnice je tedy parciální diferenciální rovnice.

Lineární diferenciální rovnice. V lineární rovnici se hledaná funkce a její derivace vyskytují pouze v první mocnině a nevyskytují se zde ani součiny funkce a derivací. Neboli funkce F je lineární funkcí proměnné u a všech jejich derivací. Uvedená rovnice je tedy lineární.

2 Obyčejné diferenciální rovnice

Jak uvidíme posléze, řešení diferenciální rovnice nemá velmi často unikátní řešení, ale místo toho dostáváme celý prostor řešení. Abychom z možných řešení vybrali to správné, musíme navíc definovat nějaké předepsané podmínky. Pokud předepisujeme hodnoty hledané funkce nebo její derivace v nějakém jednom konkrétním čase, většinou v $t = 0$, potom se jedná o **počáteční úlohu** s předepsanými **počátečními podmínkami**. Pokud jsou hodnoty funkce nebo hodnoty její derivace předepsány v různých bodech prostoru, potom mluvíme o **okrajové úloze** s **okrajovými podmínkami**. Okrajové nebo počáteční podmínky mění způsob jakým s diferenciální rovnicí zacházet a proto je budeme zkoumat odděleně. Začneme nejprve s počáteční úlohou, která je nejvhodnější pro seznámení se s diferenciálními rovnicemi. Začněme zkoumat nejprve homogenní obyčejné diferenciální rovnice s předepsanými počátečními podmínkami a to tzv. lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Přestože se jedná o velmi speciální typy rovnic, přesto je jejich analýza důležitá, protože velmi mnoho inženýrských problémů vede právě na tento typ úloh. Jejiž zkoumání je užitečnější než se na první pohled zdá. Začneme proto s jednou jedinou homogenní diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty a poté přejdeme na jejich soustavu. Posléze budeme vyšetřovat systémy nehomogenní.

2.1 Homogenní počáteční úloha

Pojďme nejprve zkoumat jednu z nejjednodušších lineárních homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a to rovnici ve tvaru

$$\dot{y}(t) = \zeta y(t), \quad \text{kde } \dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Hledáme tedy funkci, která se po derivování nezmění, až na multiplikativní konstantu $\zeta \in \mathbb{R}$. Dodejme, že v inženýrské praxi je běžné derivaci podle času označovat tečkou, proto i v tomto textu využíváme tuto symboliku. Řešení takové diferenciální rovnice není těžké přímo odhadnout, ale z důvodu systematičnosti pojďme postupovat separací proměnných. Celou rovnici nejprve vydělíme $y(t)$ a vynásobíme $\mathrm{d}t$, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(t)} = \zeta \mathrm{d}t, \tag{4}$$

Obě strany zintegrujeme. Vzhledem k různým infinitezimálním přírůstkům na levé a pravé straně integrujeme tu levou podle y a pravou stranu podle t. Integrací dostáváme řešení v impicitním tvaru

$$\ln y(t) + D = \zeta t, \quad D \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

kde D je integrační konstanta. Pro lepší práci s ní ji můžeme přepsat jako $D = -\ln C$ a tím pádem lze oba logaritmy sloučit. Výpočet ani výsledek se nezmění, jen se změní fyzikální interpretace konstanty. Dostáváme tedy

$$\ln \frac{y(t)}{C} = \zeta t. \tag{6}$$

Nakonec stačí vyjádřit $y(t)$ a dostáváme konečné explicitní řešení hledané funkce

$$y(t) = C\mathrm{e}^{\zeta t}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Drobnou poznámku zaslouží definiční obor. Integrací funkce $1/y$ dostáváme spíše $\ln |y|$. Nicméně definiční obor není potřeba v tuto chvíli řešit, protože inverzí logaritmu dostáváme exponenciální funkci, jejíž definiční obor je opět celé $\mathbb{R}$. Navíc vydělením y jsme vyloučili řešení $y(t) = 0$, které je stále legitimním řešením. Tyto problémy plynou z neekvivalentních úprav, ale výsledný vzorec už omezení nemá a je v pořádku. Naše řešení je jednoznačné až na multiplikativní konstantu C. Tu lze určit přímo z počáteční podmínky $y(0) = y_0$, z té ihned dostáváme $C = y_0$ a výsledným řešením je

$$y(t) = y_0\mathrm{e}^{\zeta t}. \tag{8}$$

Než přejdeme k soustavám, pojďme analyzovat diferenciální rovnici (3) i v oboru komplexních čísel. Tyto úvahy se nám hodí i při řešení rovnic v oboru reálných čísel. Pro naše případy stačí, když uvažujeme $\zeta \in \mathbb{C}$. Postup výpočtu zůstává stejný, a s využitím, že každé komplexní číslo lze zapsat jako součet $\zeta = a + b\mathrm{i}$, dostáváme modifikované řešení ve tvaru

$$y(t) = y_0\mathrm{e}^{(a+b\mathrm{i})t} = y_0\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}. \tag{9}$$

Připomeňme eulerův vzorec pro exponenciální funkci komplexního čísla

$$\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \tag{10}$$

který okamžitě aplikujeme pro naše řešení a dostáváme

$$y(t) = y_0\mathrm{e}^{at}\left(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt\right). \tag{11}$$

Člen v závorce je harmonický člen, který má stálou amplitudu bez ohledu na hodnotu parametru b. V komplexní rovině má tento člen stálou velikost rovnou jedné. Parametr a má oproti tomu nepřímý vliv na velikost amplitudy. Pokud je $a > 0$, potom exponenciální funkce e^{at} roste nade všechny meze při $t \to 0$ a amplituda řešení tedy roste taktéž. Říkáme, že se jedná o tzv. **nestabilní řešení**. Naopak, pokud $a < 0$, potom exponenciála tlačí řešení v dlouhém čase k nule a mluvíme o tzv. **stabilním řešení**. Jak je vidět, stabilitu řešení ovlivňuje pouze velikost reálné části komplexního čísla ζ.

Nakonec ještě zmiňme, že hledaná funkce $y(t)$ nemusí být jen funkcí jedné proměnné, ale může záviset na libovolném množství dalším proměnných. Aby se pořád jednalo o ekvivalentní úlohu, nesmí být závislost na ostatních proměnných diferenciální. Např. pro funkci $y(x, y, t)$ by diferenciání rovnice

$$\frac{\partial y(x, y, t)}{\partial t} = \zeta y(x, y, t), \tag{12}$$

měla řešení

$$y(x, y, t) = y(x, y, 0)\mathrm{e}^{\zeta t}. \tag{13}$$

Jednalo by se už kategoricky o parciální diferenciální rovnici, ale diferenciální vztah zůstává jen pro t. Mluvme tedy spíše o pseudo-parciální diferenciální rovnici, která vykazuje chování ekvivalentní s obyčejnou diferenciální rovnicí.

Předchozí úvahy o našem velmi jednoduchém systému zní akademicky, ale veškeré tyto úvahy se pokusíme v následující kapitole zobecnit pro analýzu soustavy diferenciálních rovnic. Než se do nich ale pustíme, pokusme se i v tomto bodě o jakési zobecnění našeho systému. Vše bude dále rigorozně odvozeno, ale o spojler se můžeme pokusit už nyní. Náš systém je diferenciální rovnice prvního řádu, tedy obsahuje derivace prvních řádů. Pro zbavení se derivace musíme systém jednou integrovat, proto se v řešení objevuje neznámá konstanta C. Pokud se ovšem bude jednat o rovnici druhého řádu, potom jsou potřeba takové integrace dvě a dá se (správně) předpokládat, že se v řešení vyskytnou dvě takové neznáme konstanty. Z toho taktéž plyne, že pro unikátní řešení je zapotřebí zvolit dvě okrajové podmínky. A tedy nepřekvapivě při rovnici řádu n je zde n volných parametrů. Podobně je tomu u soustav diferenciálních rovnic. Pokud máme dvě nezávislé rovnice druhého řádu, tak nejen že každá z rovnic generuje dvě volné konstanty, ale vzhledem k tomu že rovnice jsou dvě, je počet konstant dvojnásobný. Tedy soustava m rovnic řádu n má takových konstant celkem $m \cdot n$.

Vzhledem k tomu, že náš systém řešení generuje n volných parametrů, můžeme hovořit o n rozměrném prostoru řešení. Jak je známo z teorie vektorových prostorů, pro popis n rozměrného světa potřebujeme n lineárně nezávislých vektorů. Stejně tomu je v případě prostoru funkcí, kde hledáme n nezávislých funkcí, které generují prostor řešení. To vše bude ukázáno hned v následující kapitole, ale intuice nás vede k tomu, že by to nějak takto mohlo fungovat.

[TODO: Přidat příklad]

2.2 Soustava homogenních počátečních úloh

Přirozeným zobecněním představeného systémem je soustava obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a předepsanými okrajovými podmínkami. Náš systém je tedy popsán m rovnicemi tvaru

$$\dot{y}_i(t) = \zeta_{i1} y_1(t) + \zeta_{i2} y_2(t) + \cdots + \zeta_{im} y_m(t), \quad i \in \langle 1, m \rangle, \tag{14}$$

kde nyní vystupuje m neznámých funkcí $y_i(t)$. Pro příklad může náš systém o dvou rovnicích vypadat následovně

$$\dot{y}_1(t) = 2y_1(t) + y_2(t), \tag{15}$$

$$\dot{y}_2(t) = y_1(t) + 3y_2(t). \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

Což lze zapsat kompaktněji pomocí maticového a vektorového zápisu. Uvažujme, že hledané funkce y_1 a y_2 uspořádáme do vektorové funkce $(y_1(t), y_2(t))$ a všechny parametry uspořádáme do matice A. Díky tomu lze náš systém ekvivalentně zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

V předcházející sekci jsme si ukázali, že přirozeným výsledkem pro homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty je exponenciální funkce $\mathrm{e}^{\lambda t}$, kde velikost parametru λ vyplynula přímo ze zadání. Zdá se přirozené uvažovat $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, tedy že řešení jednotlivých funkcí bude opět exponenciála. Touto úvahou ale nemusíme dojít ke korektnímu nebo úplnému řešení. Rovnice jsou navzájem provázané a je tedy vhodnější očekávat tuto provázanost mezi funkcemi. Řešení proto uvažujeme v následujícím tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{t}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{t}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{19}$$

kde uvažujeme $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Jinak by se nejednalo o lineárně nezávislé funkce a náš prostor řešení by nebyl popsán celý. V případě, že dojde k rovnosti těchto parametrů, vypadá řešení trochu odlišně, o tom více později. Takto zvolené řešení můžeme nyní již směle dosadit do zadání a dostáváme

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \lambda_1 \boldsymbol{t}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \boldsymbol{t}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{A}\boldsymbol{y} = \mathrm{A}\boldsymbol{t}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \mathrm{A}\boldsymbol{t}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}. \tag{20}$$

Funkce $\boldsymbol{y}$ je řešením soustavy diferenciálních rovnic právě tehdy, když parametry $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \lambda_1, \lambda_2$ splňují uvedenou rovnici (20). Tato rovnice

$$(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\, \boldsymbol{t}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + (\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{I})\, \boldsymbol{t}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \boldsymbol{0}. \tag{21}$$

Při $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se ovšem jedná o dvě lineárně nezávislé funkce $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ a $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. Pro rovnost nule musí být tedy roven nule jak člen u první funkce, tak člen u druhé funkce. Tedy

$$(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\, \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{0} \tag{22}$$

$$(\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{I})\, \boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{0}. \tag{23}$$

Takové rovnice jsou známé z lineární algebry. Parametr λ, který splňuje uvedenou rovnici se nazývá vlastním číslem matice A a jemu příslušící vektor $\boldsymbol{t}$ se nazývá vlastním vektorem. Poslední chybějící článek je volná integrační konstanta. Pokud je řešením výraz $\boldsymbol{t}_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$, potom je i jakýkoliv jeho násobek $C\boldsymbol{t}_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}, C \in \mathbb{R}$ stále řešením. Z toho důvodu lze předpokládat, že výsledné obecné řešení bude ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 \boldsymbol{t}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \boldsymbol{t}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Nyní zbývá dořešit určení těchto voných konstant C_1 a C_2 z okrajových podmínek. Uvažujme bez ztráty obecnosti pouze okrajové podmínky v čase $t = 0$. Okrajové podmínky vyčíslené v jiném časovém okamžiku lze převést na tyto pouhým časovým posunem celého problému. Uvažujme tedy dvě okrajové podmínky ve tvaru $y_1(0) = y_{0,1}$ a $y_2(0) = y_{0,2}$ nebo kompaktněji $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$. Naše řešení vyčíslené v tomto čase tedy nabývá tvaru

$$\boldsymbol{y}_0 = C_1 \boldsymbol{t}_1 + C_2 \boldsymbol{t}_2. \tag{25}$$

Pro další úvahy je vhodnější použít kompaktnější zápis. Pokud volné parametry zapíšeme do vektoru $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2)$ a vlastní vektory vyskládáme sloupcově do matice V takto

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

kde první vlastní vektor je složen se složek $\boldsymbol{t}_1 = (t_{11}, t_{12})$ a druhý $\boldsymbol{t}_2 = (t_{21}, t_{22})$. Naše řešení lze díky tomu přepsat do kompaktní formy

$$\boldsymbol{y}_0 = \mathrm{T}\boldsymbol{C}, \tag{27}$$

což nám umožňuje přímý výpočet hledaných konstant z předepsaných okrajových podmínek takto

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{T}^{-1} \boldsymbol{y}_0. \tag{28}$$

Ze všeho zmíněného lze tedy usuzovat, že pokud máme soustavu rovnic definovanou maticí A, potom je výsledné řešení tvořeno z vlastních čísel a vlastních vektorů této matice. Postup řešení takové soustavy je tedy následující:

1. Ze zadání získáme matici A, která popisuje systém a spočteme její vlastní čísla λ_i a vastní vektory $\boldsymbol{t}_i$.
2. Výsledné obecné řešení je potom získáno superpozicí jako
$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} C_i \boldsymbol{t}_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}. \tag{29}$$
3. Z předepsaných okrajových podmínek dostaneme po dosazení soustavu rovnic pro parametry C_i, které získáme vyřešením této soustavy.

Představený systém není příliš těžké zobecnit na více rovnic. Než přejdeme na ukázku toho, kdy předchozí úlohy selhávají, představíme si systematičtější způsob popisu daného systému, který aplikujeme rovnou na obecný problém o m rovnicích. Místo dvou funkcí jedné proměnné uvažujeme takových funkcí m a systém je popsán m diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty. Každá z rovnic má tedy tvar

$$\dot{y}_i(t) = \zeta_{i1} y_1(t) + \zeta_{i2} y_2(t) + \cdots + \zeta_{im} y_m(t), \quad i \in \langle 1, m \rangle. \tag{30}$$

Výhodnější je se soustavou pracovat v maticové podobě

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}, \tag{31}$$

kde opět matice A je matice koeficientů a $\boldsymbol{y}$ je vektor neznámých funkcí.

Uvažujme na okamžik, že náš systém je zadán tak vhodně, že matice A je diagonální. Schematicky se jedná o následující soustavu

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_{mm} \end{pmatrix}}_{\mathrm{D}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{32}$$

V tomto případě se náš problém rozpadne na n nezávislých obyčejných diferenciálních rovnic, jejichž řešení známe. Řešení i-té rovnice $\dot{y}_i = \zeta_{ii} y_i$ s okrajovou podmínkou $y_i(0) = y_{0,i}$ je rovno $y_i = \mathrm{e}^{\zeta_{ii} t} y_{0,i}$. Toto řešení můžete tedy opět zapsat kompaktně pomocí maticového zápisu jako

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ \vdots \\ y_{0,n} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{D}t} \boldsymbol{y}_0. \tag{33}$$

Využili jsme zde kompaktní zápis diagonální matice, která má na diagonále exponenciální funkce s exponenty tvořenými koeficienty dané maticí D jako $\mathrm{e}^{\mathrm{D}t}$. Tento způsob zápisu je více rozveden později, na tomto místě stačí přijmout fakt, že takovýto zápis je legitimní. K otázce jak přesně přistupovat k operaci mocnění na matici se vrátíme zanedlouho.

Naše diagonální soustava je sice elegantní a lehká na vyřešení, nicméně přirozené fyzikální systémy mívají většinou komplikovanější strukturu a řídící rovnice jsou výrazně více propojené. Pokud ovšem umíme bez problému řešit systémy s diagonální maticí, můžeme se pokusit náš provázaný problém diagonalizovat a tím ho převést na systém jehož řešení známe. Vzniká tedy přirozená otázka, zda je matice A diagonalizovatelná. Jeden z přirozených způsobů, jak o tom matematicky přemýšlet je zda existuje nějaká lineární transformace souřadnic $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$, která naše funkce $\boldsymbol{y}$ ve starém souřadném systému převede na nové funkce $\boldsymbol{x}$ v novém souřadném systému, které jsou diagonální vzhledem ke zvolené soustavě rovnic. Jedná-li se o lineární transformaci souřadnic, lze tuto transformaci vyjádřit maticovým násobením $\boldsymbol{y} = \mathrm{T}\boldsymbol{x}$, kde T je transformační matice. Chceme-li se podívat, jak naše transformace změnila soustavu diferenciálních rovnic, stačí pouze dosadit, dostáváme

$$\mathrm{T}\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{AT}\boldsymbol{x}, \tag{34}$$

neboli

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{x}. \tag{35}$$

Jak bylo řečeno, o transformaci předpokládáme, že diagonalizuje systém. Ptáme se tedy, jakého musí být transformace typu, aby vzniklá nová matice soustavy byla diagonální, neboli musí platit

$$\mathrm{D} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}, \tag{36}$$

neboli

$$\mathrm{TD} = \mathrm{AT}. \tag{37}$$

Poslední představená rovnice je rovnice představující základní rovnici pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů. Aby to bylo lépe vidět, je vhodné si matici T představit složenou sloupcově z vektorů $\boldsymbol{t}_i$. Pokud prvky diagonální matice označíme λ_i, potom pro součin TD platí

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{t}_2 & \cdots & \boldsymbol{t}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\boldsymbol{t}_1 & \lambda_2\boldsymbol{t}_2 & \cdots & \lambda_m\boldsymbol{t}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \tag{38}$$

a tedy rovnici (37) lze pomocně zapsat jako

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\boldsymbol{t}_1 & \lambda_2\boldsymbol{t}_2 & \cdots & \lambda_m\boldsymbol{t}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{t}_2 & \cdots & \boldsymbol{t}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Lze si rozmyslet, že se na rovnost těchto dvou matic můžete dívat i po částech. Pokud se tyto matice rovnají, musí se rovnat i jejich sloupce. Pokud se podíváme na i-tý sloupec, musí tedy platit

$$\boldsymbol{t}_i\lambda_i = \mathrm{A}\boldsymbol{t}_i, \tag{40}$$

Tato rovnice by měla být povědomá, opět se jedná o problém vlastních čísel a vlastních vektorů. Tedy maticová rovnice (37) představuje kompaktní zápis pro vlastní problém. Hledáme diagonální matici D a matici T, které tuto rovnost splňují. Toho lze docílit tak, že prvky na diagonále v D budou vlastní čísla a matice T bude sloupcově vytvořena z vlastních vektorů. Zde vidíme, že problém vlastních čísel má úzkou souvislost s řešením soustavy diferenciálních rovnic.

Dle rovnice (35) tedy diagonální matice vytvořená z vlastních čísel popisuje náš transformovaný systém $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{D}\boldsymbol{x}$. Jeho řešení už bylo představeno dříve a lze ho symbolicky zapsat jako $\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{D}t}$. Toto je ovšem řešení transformované soustavy, my chceme znát řešení původní soustavy. Přímo z našich předpokladů ovšem plyne $\boldsymbol{y} = \mathrm{T}\boldsymbol{x}$ a tedy z řešení $\boldsymbol{x}$ získáme $\boldsymbol{y}$ pouhý přenásobením transformační matice. Dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{T}\mathrm{e}^{\mathrm{D}t}. \tag{41}$$

Všimněte si, že jelikož je matice T tvořena z vlastních vektorů, dostáváme tentýž prostor řešení $\boldsymbol{y} = \sum \boldsymbol{t}_i y_i$ jako na začátku kapitoly. Naše úvahy z didaktických důvodů diskriminovaly volné parametry C_i. Výše bylo odvozeno, že volbu takových parametrů z počátečních podmínek lze získat jako T^{-1} a naše konečné řešení splňující okrajové podmínky $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ je rovno

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{T}\mathrm{e}^{\mathrm{D}t}\mathrm{T}^{-1}\boldsymbol{y}_0. \tag{42}$$

Ke stejnému závěru se lze dostat skrze analýzu zmíněného mocnění na matici. Otázkou totiž zůstává, co přesně e^{A} znamená. To lze nejlépe nahlédnout z Taylorova rozvoje. Lze relativně jednoduše ukázat, že pro skalární funkci e^x platí rozvoj

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{43}$$

Jedná se ovšem o výraz, který lze relativně bezproblémově zobecnit i pro matice. Stačí jedničku nahradit jednotkovou maticí a mocniny matic jsou přirozeně

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{AA}, \quad \mathrm{A}^3 = \mathrm{AAA}, \quad \mathrm{A}^n = \overbrace{\mathrm{AA}\cdots\mathrm{A}}^{n \text{ krát}}. \tag{44}$$

Díky tomu lze ihned definovat i naši maticovou exponenciálu jako

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2\frac{1}{2!} + \mathrm{A}^3\frac{1}{3!} + \cdots , \tag{45}$$

kde I je jednotková matice. Nebo případně rovnou

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}t} = \mathrm{I} + \mathrm{A}t + t^2\mathrm{A}^2\frac{1}{2!} + t^3\mathrm{A}^3\frac{1}{3!} + \cdots . \tag{46}$$

Pokud se podíváme na již zmíněnou exponenciální funkci diagonální matice $\mathrm{e}^{\mathrm{D}t}$, nedostáváme nic překvapujícího. Mocniny diagonálních matic jsou stále diagonální matice, akorát jejich prvky jsou mocněné. Pro diagonální matici tedy přímo z Taylorova rozvoje plyne

$$\mathrm{e}^{\mathrm{D}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Nicméně mi nechceme znát pouze řešení diagonalizované soustavy $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{D}\boldsymbol{x}$, ale také řešení původní soustavy $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}$. A zde je vidět krása maticové exponenciály, protože stejně jako $y = \mathrm{e}^{\zeta t}$ je řešením diferenciální rovnice $\dot{y} = \zeta y$, je $\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ řešením $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}$. Při opětovném uvažování počátečních podmínek $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ dostáváme řešení počáteční úlohy jako

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}t}\boldsymbol{y}_0. \tag{48}$$

Matici A můžeme získat přímo z (36) jako $\mathrm{A} = \mathrm{TDT}^{-1}$, což lze rovnou dosadit do Tylorova rozvoje pro $\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ a postupně dostáváme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}t} = \mathrm{I} + \mathrm{A}t + t^2\mathrm{A}^2\frac{1}{2!} + t^3\mathrm{A}^3\frac{1}{3!} + \cdots, \tag{49}$$

$$= \mathrm{TT}^{-1} + t\mathrm{TDT}^{-1} + t^2\mathrm{TD}^2\mathrm{T}^{-1}\frac{1}{2!} + t^3\mathrm{TD}^3\mathrm{T}^{-1}\frac{1}{3!} + \cdots, \tag{50}$$

$$= \mathrm{T}\underbrace{\left(\mathrm{I} + t\mathrm{D} + t^2\mathrm{D}^2\frac{1}{2!} + t^3\mathrm{D}^3\frac{1}{3!} + \cdots\right)}_{\mathrm{e}^{\mathrm{D}t}}\mathrm{T}^{-1}, \tag{51}$$

kde bylo navíc využita vlastnost $\mathrm{A}^n = \mathrm{TD}^n\mathrm{T}^{-1}$, která plyne ihned z

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{TD}\underbrace{\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}}_{\mathrm{I}}\mathrm{DT}^{-1}\cdots\mathrm{TD}\underbrace{\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}}_{\mathrm{I}}\mathrm{DT}^{-1} = \mathrm{TD}^n\mathrm{T}^{-1} \tag{52}$$

Tedy pro shrhutí - naše soustava diferenciálních rovnic $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}$ má řešení

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{Te}^{\mathrm{D}t}\mathrm{T}^{-1}\boldsymbol{y}_0, \tag{53}$$

kde D je diagonální matice vlastních čísel a T je matice vlastních vektorů. Je vhodné poznamenat, že násobení první maticí T zleva pochází z transformace mezi souřadnými systémy a násobení inverzní maticí T zprava pochází z hledání volných parametrů C_i.

V následující sekci si všechny předchozí úvahy představíme na konkrétním případu matematického kyvadla.

Řešený příklad - matematické kyvadlo

Začneme typickým učenicovým příkladem, který je ale vhodně ilustrativní a to diferenciální rovnice teoretického kyvadla. Slovo teoretické využíváme proto, že je uvažována celá řada zjednodušujících předpokladů: z těch podstatných uveďme, že závěsný prut nemá vlastní váhu, veškerá váha je koncentrována v hmotě na konci kyvadla. Závěs má konstantní délku a kyvadlo nemá žádné tření. Z těchto předpokladů můžeme odvodit základní rovnici našeho fyzikálního problému ve tvaru

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{54}$$

Nejedná se ovšem o lineární diferenciální rovnici, proto uvažujeme navíc, že úhel θ je malý a lze potom volit aproximaci $\sin\theta \approx \theta$ a dostáváme lineární rovnici pro tzv. matematické kyvadlo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{55}$$

Jedná se sice o rovnici 2. řádu, kterou neumíme řešit představenými nástroji, ale její převedení na dvě rovnice prvního řádu je relativně přímočaré. Stačí uvažovat novou proměnnou ξ, která reprezentuje úhlovou rychlost. Dostáváme soustavu

$$\dot{\theta} = \xi, \tag{56}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{g}{l}\theta, \tag{57}$$

kterou můžeme vyřešit uvedenými metodami. Nejprve sestavíme matici soustavy

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

kde jsme pro lepší manipulaci s konstantami zavedli novou proměnnou ω. Tu budeme později i interpretovat, prozatím je pouze pomocná. Vlastní čísla takové matice vycházejí

$$\lambda = \pm\mathrm{i}\omega. \tag{59}$$

Z těchto hodnot lze rovnou sestavit diagonální matici D a matici T sestavenou z vlastních vektorů jako

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{i}}{\omega} \\ 1 & \frac{\mathrm{i}}{\omega} \end{pmatrix}, \tag{60}$$

kde je uvedena navíc inverzní matice k matici T. Všechny ingredience máme tedy k dispozici a můžeme sestavit výsledné řešení v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{i}}{\omega} \\ 1 & \frac{\mathrm{i}}{\omega} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0 \tag{61}$$

Trojici maticového násobení za sebou můžeme provést a ihned dostáváme příjemnější tvar

$$\boldsymbol{y}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0 \tag{62}$$

Výsledné řešení je stále v komplexním tvaru, což může překvapit. Vyšetřujeme totiž reálný systém u kterého očekáváme reálnou odezvu, tedy reálné řešení. Naše řešení je vskutku reálné, pojďme to nyní ukázat. Použijeme k tomu pouze Eulerův vzorec. Ihned dostáváme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = 2\cos(\omega t) \tag{63}$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t) \tag{64}$$

$$\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = -2\omega\sin(\omega t), \tag{65}$$

a naše řešení je opravdu pouze v oboru reálných čísel. Dostáváme

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_0, \tag{66}$$

což je naše konečné řešení. Případně můžeme ještě nakonec řešení rozepsat po složkách jako

$$\theta(t) = \cos(\omega t)\theta_0 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\xi_0, \tag{67}$$

$$\xi(t) = -\omega\sin(\omega t)\theta_0 + \cos(\omega t)\xi_0, \tag{68}$$

2.3 Mnohonásobné vlastní číslo

Jak si ukážeme za chvíli, nastávají situace, kdy předcházející úvahy selhávají. Zejména se to týká případů kdy nám vycházejí vícenásobná vlastní čísla. Nicméně samotný výskyt násobného vlastního čísla ještě nic neznamená, záleží na vlastnostech vlastních vektorů. Co třeba hned náš akademický příklad

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \tag{69}$$

Ten samozřejmě můžeme vyřešit ihned bez použití jakýchkoliv metod. Nicméně i za použití rozkladu do vlastních čísel bychom měli dostat stejný výsledek. Charakteristická rovnice takové matice je $(1-\lambda)^2 = 0$ a tedy vlastní číslo je dvojnásobné a je rovno $\lambda = 1$. Z analýzy vlastních čísel víme, že vlastní vektor je vektor splňující $(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Pro náš systém tedy po dosazení vlastního čísla dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{70}$$

Nicméně je vidět, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{v}$ je rovnost splněna. Můžeme ho tedy zvolit jakkoliv. Aby náš systém byl kompletní, musíme hledat dva takové vektory - zde už ovšem neplatí libovůle ve výběru. Zvolená dvojice musí být vzájemně lineárně nezávislá, jinak by nebylo možné invertovat matici T. Jako nejpřirozenější je volit dvojici $(1, 0)$ a $(0, 1)$, nicméně můžeme zkusit zvolit i jinou dvojici a sledovat, zda dostaneme totéž řešení. Zvolme např. $\boldsymbol{t}_1 = (a, 0)$

a $\boldsymbol{t}_2 = (b, c)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Aby řešení bylo legitimní a dostatečně regulární, vyloučíme možnost $a = 0$ nebo $c = 0$. Pak pro náš systém dostáváme řešení

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{T}\mathrm{e}^{\mathrm{D}t}\mathrm{T}^{-1}\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_0. \quad (71)$$

Kde jsme opravdu po roznásobení matic dostali očekávané řešení. V takovém případě se tedy na našem představeném způsobu řešení nic nemění. Trochu jiná situace nastává v případě následující úlohy

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \quad (72)$$

V tomto případě dostáváme tytéž vlastní čísla, tedy dvojnásobný kořen $\lambda = 1$, ale liší se maticová rovnice pro výpočet vlastních vektorů, která je nyní ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \quad (73)$$

Hned z prvního řádku dostáváme, že druhá složka vlastního vektoru musí být nulová, zatímco první může být libovolná. Tento fakt je problematický neboť libovolná dvojice $(a, 0), (b, 0)$ je lineárně závislá a tím pádem získaná matice T není invertovatelná a nelze tedy stanovit součin $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$. Naše zvolené způsoby řešení tedy selhávají a systém takovým způsobem nelze diagonalizovat. Vraťme se proto k dříve uvedené maticové exponenciále, která nám může prozradit více o charakteru řešení. Řekli jsme si, že obecným řešením takového systému je následující výraz

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}t}\boldsymbol{y}_0, \quad (74)$$

kde maticovou exponenciálu jsme si definovali dříve. V případě našeho příkladu stačí nyní dosadit do rozvoje takového systému. V první řadě je potřeba stanovit maticové mocniny. Pro ně dostáváme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

To lze dosadit do Taylorova rozvoje pro $\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ čímž dostaneme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}t} = \mathrm{I} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{t^3}{6} + \cdots. \quad (76)$$

Je ihned vidět, že v prvním řádku druhého sloupce, tedy na pozici $(1, 2)$, dostáváme nulovou funkci, zatímco na pozici $(1, 1)$ a $(2, 2)$ dostáváme klasický rozvoj pro e^t. Ovšem na pozici $(2, 1)$ dostáváme následující rozvoj

$$t + 2t^2\frac{1}{2!} + 3t^3\frac{1}{3!} + 4t^4\frac{1}{4!} + \cdots, \quad (77)$$

neboli po úpravě

$$t\left(1+t+t^2\frac{1}{2!}+t^3\frac{1}{3!}+\cdots\right)=t\mathrm{e}^t. \tag{78}$$

Náš prostor řešení je tedy definován dvojicí lineárně nezávislých funkcí e^t a $t\mathrm{e}^t$ a konečné řešení je

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t\\ 0 & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0. \tag{79}$$

Tento způsob řešení je naprosto legitimní a vastně nejsystematičtější, ale nechceme pokaždé, když narazíme na vícenásobní vlastní číslo, počítat nekonečnou maticovou řadu. Pojďme si proto představit pragmatičtější způsob řešení této úlohy. Zůstaňme stále u dvou rovnicích s dvěma neznámými funkcemi, které mají dvojnásobné vlastní číslo λ. Nicméně zkoumejme tentokrát plně obecný systém $\dot{\boldsymbol{y}}=\mathrm{A}\boldsymbol{y}$. Pro úplný popis prostoru řešení musíme nalézt dvojici lineárně nezávislých funkcí, které jsou řešením naší úlohy. Je přirozené uvažovat dvojici funkcí $\mathrm{e}^{\lambda t}$ a $t\mathrm{e}^{\lambda t}$. Pokud tedy budeme uvažovat první funkci řešení jako $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{t}_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ a dosadíme ji do diferenciální rovnice, potom po úpravě a po vydělení exponenciální funkcí dostáváme

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\,\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{0}. \tag{80}$$

Jedná se o identickou rovnici pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů. Tato rovnice nám tedy říká, že pokud bude $\boldsymbol{t}_1$ vlastním vektorem matice A, potom je $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{t}_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ řešením naší soustavy diferenciálních rovnic. Podobně můžeme zkusit dosadit $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{t}_2t\mathrm{e}^{\lambda t}$, získáváme

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\,\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{0}, \tag{81}$$

$$\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{0}. \tag{82}$$

Tyto rovnice jsou ovšem problematické, neboť první z nich říká, že by $\boldsymbol{t}_2$ měl být vlastní vektor, který by měl být z definice nenulový. Druhá rovnice je s tím ve sporu. Druhá legitimní možnost je lineární kombinaci těchto funkcí, tedy řešení ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{t}_2\mathrm{e}^{\lambda t}+\boldsymbol{t}_3t\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{83}$$

Opět lze toto řešení dosadit do soustavy

$$\lambda\boldsymbol{t}_2\mathrm{e}^{\lambda t}+\boldsymbol{t}_3\mathrm{e}^{\lambda t}+t\lambda\boldsymbol{t}_3\mathrm{e}^{\lambda t}=\mathrm{A}\boldsymbol{t}_2\mathrm{e}^{\lambda t}+t\mathrm{A}\boldsymbol{t}_3\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{84}$$

Nyní stačí porovnat členy, které se vyskytují u první funkce, tedy $\mathrm{e}^{\lambda t}$ a členy, které jsou u druhé funkce $t\mathrm{e}^{\lambda t}$. Tímto porovnáním dostáváme opět dvě rovnosti

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\,\boldsymbol{t}_3=\boldsymbol{0}, \tag{85}$$

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\,\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{t}_3, \tag{86}$$

Vektor $\boldsymbol{t}_3$ musí splňovat stejnou rovnici jako vektor $\boldsymbol{t}_1$, můžeme tedy položit jejich rovnost $\boldsymbol{t}_1 \equiv \boldsymbol{t}_3$. Pokud navíc vektor $\boldsymbol{t}_2$ splňuje $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\,\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{t}_3$, potom je (83) také řešením soustavy diferenciálních rovnic. Našli jsme tedy dvojici lineárně nezávislých funkcí, které jsou řešením. Obecné plné řešení pak získáme jen jejich kombinací jako

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 \boldsymbol{t}_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + C_2 \left(\boldsymbol{t}_2 \mathrm{e}^{\lambda t} + \boldsymbol{t}_1 t \mathrm{e}^{\lambda t} \right). \tag{87}$$

[TODO: Dokončení]

Řešený příklad - ?

[Přidat příklad]

2.4 Okrajová úloha

Jednoduchá 1D obyčejná diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami přináší náhle mnoho nových výzev, které jsou představeny v této kapitole. Mnoho závěru nás poměrně dobře připraví k přechodu na parciální diferenciální rovnice. Počáteční úloha může být vymyšlena natolik nepěkně, že i existence a jednoznačnost řešení je narušena. Takové pojmy nebyly v předchozí sekci vůbec rozebírány zejména proto, že drtivá většina fyzikálních systémů vede právě na ty slušné rovnice, které mají pouze slušná řešení. U okrajové úlohy je situace trošku jiná. Jak sami uvidíte, je vhodné začít vyšetřovat také existenci a jednoznačnost řešení. To přirozeně vede k jistému stupni abstrakce, který bude představen zanedlouho.