Zlomková vazkopružnost

J. Schmidt

Datum poslední aktualizace: 6. února 2024

Text je zatím jen souhrn poznámek a nemá dostatečnou koherenci. Některé odstavce jsou plně popsány, jinde jsou rovnice uvedeny bez poznámek a jinde chybí třeba doplnit obrázky. Časem budou nejasné odstavce přepsány a do nutných míst doplněny obrázky nebo text.

Obsah

1 Zlomková matematická analýza

Pojem zlomková derivace není tolik známý, proto jsou matematické nástroje používané v této teorii zjednodušeně představeny v tomto odstavci.

Hojně využívaný nástroj na kterém je tato teorie založená je zobecnění faktoriální funkce $\Gamma_{\mathbb{N}}(n) = (n-1)!$. Pokud definiční obor rozšíříne z přirozených čísel $\mathbb{N}$ na čísla reálná $\mathbb{R}$, dostáváme tzv. gama funkci. Jinými matematickými slovy to lze vyjádřit také tak, že gama funkce je zúplněním faktoriální funkce. Toto zobecnění nelze udělat jednoznačně, musíme přidat minimálně jednu další podmínku. Přirozenou podmínkou se zdá pravidlo

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \tag{1}$$

které zjednoznační toto rozšíření. Pro úplnost dodáváme další elementární vlastnosti gama funkce

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(0) = \infty, \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1). \tag{2}$$

Další důležitou funkcí, která se přirozeně objevuje ve zlomkovém kalkulu je Mittag-Lefflerova funkce. Jedná se o zobecněnou exponenciální funkci. Exponenciální funkci je možné zapsat jako nekonečnou řadu

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)}, \tag{3}$$

kde jsme rovnou místo faktoriálu využili představenou gama funkci s argumenty z přirozených čísel. Zavedením nových dvou parametrů α a β získáváme zobecněnou exponenciální funkci zvanou Mitta-Lefflerova funkce

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{4}$$

Základní vlastnosti vyplývají přímo z definice

$$E_{1,1}(x) = \mathrm{e}^x, \quad E_{0,1}(x) = E_{0,2}(x) = \frac{1}{1-x}, \quad E_{1,2}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}. \tag{5}$$

Pomocí gama funkce lze nyní lehce zobecnit i pojem integrálu. Vyjděme z Cauchyho vzorce pro opakovanou integraci, který říká, že chceme-li opakovaně integrovat funkci, potom platí

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-t')^{n-1} f(t')\,\mathrm{d}t', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Operátor J^n značí n-násobnou integraci. Tento symbol je použit právě kvůli následnému zobecnění. Klasické symboly pro opakovanou integraci a derivaci nejsou na takové zobecnění vhodné. Ještě dodejme, že spodní mez nemusí být nutně 0, to je diskutováno později. Zobecnění pro $\mathbb{R}$ je díky gama funkci přímočaré

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-t')^{\alpha-1} f(t')\,\mathrm{d}t', \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Přímé zobecnění derivace není takto jednoduché, ale lze vyjít z právě uvedeného vztahu a založit to na něm. Využijme toho, že neceločíselnou derivaci lze složit z celočíselné derivace a neceločíselné integrace. To lze udělat dvěma základními způsoby, ty jsou představeny v následujícím.

Riemann-Liouville zlomková derivace je definována následovně

$$D^{\alpha}_{\mathrm{RL}} f(t) = D^{\lceil \alpha \rceil} J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f(t), \tag{6}$$

kde D^n značí n-tou derivaci a $\lceil \bullet \rceil$ je horní celá část. Jako příklad uveďme, že chceme-li derivovat 0.8 krát, potom nejprve integrujeme 0.2 krát a nakonec provedeme jednu celočísenou derivaci. Matematicky zapsáno jako

$$D^{0.8} f(t) = D^1 J^{0.2} f(t). \tag{7}$$

Caputo zlomková derivace je definována stejným způsobem, akorát je pořadí celočíselné derivace a neceločíselné integrace otočeno.

$$D^{\alpha}_{\mathrm{C}} f(t) = J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} D^{\lceil \alpha \rceil} f(t), \tag{8}$$

Náš příklad by byl tedy zapsán jako

$$D^{0.8} f(t) = J^{0.2} D^1 f(t). \tag{9}$$

Ještě se pojďme v rychlosti podívat na zlomkové diferenciální rovnice a jak je řešit. Vemi vhodný nástroj k tomu určený je Laplaceova transformace. Její hlavní výhodou je fakt, že diferenciální rovnici převede na algebraickou rovnici, která často může být jednoduše vyřešena. Laplaceova transformace $\mathcal{L}\{f(x)\}$ zlomkové derivace pro jednotlivé typy je následující

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}_{\mathrm{RL}} f(t)\} = s^{\alpha} f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1}_{\mathrm{RL}} f(0), \quad n-1 < \alpha \leq n, \tag{10}$$

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}_{\mathrm{C}} f(t)\} = s^{\alpha} f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^{k}_{\mathrm{C}} f(0), \quad n-1 < \alpha \leq n, \tag{11}$$

kde $n = \lceil \alpha \rceil$. Další důležitá transformace je transformace Mittag-Leffler funkce

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda} \tag{12}$$

Příklad. Uveďme pro názornost rovnou jeden příklad řešení homogenní diferenciální rovnice pro oba typy zlomkové derivace. Uvažujme následující diferenciální rovnici

$$D^{\alpha} \sigma(t) + \frac{\sigma(t)}{\tau^{\alpha}} = 0. \tag{13}$$

Pokud budeme uvažovat, že daná zlomková derivace je typu Riemann-Liouville, potom po provedení laplaceovi transformace dostáváme

$$s^{\alpha} \hat{\sigma}(s) - D^{\alpha-1}_{\mathrm{RL}} \hat{\sigma}(0) + \frac{\hat{\sigma}(s)}{\tau^{\alpha}} = 0. \tag{14}$$

Připomeňme, že původní dvojice $\{\sigma(t), t\}$ byla transformována na dvojici $\{\hat{\sigma}(s), s\}$. Rovnost výše už je algebraická rovnice z které můžeme snadno vyjádřit neznámou funkci

$$\hat{\sigma}(s) = \frac{C}{s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha}}, \tag{15}$$

kde konstanta C je určena počáteční podmínkou $D_{\mathrm{RL}}^{\alpha-1}\hat{\sigma}(0) = C$. Řešení v Laplaceově prostoru už máme, nyní stačí aplikovat inverzní Laplaceovu transformaci a dostáváme řešení

$$\sigma(t) = Ct^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right), \tag{16}$$

Pokud vezmeme v úvahu stejnou diferenciální rovnici, kde ale nyní budeme uvažovat Caputovu derivaci, potom po transformaci dostáváme

$$s^\alpha \hat{\sigma}(s) - s^{\alpha-1}D_{\mathrm{C}}^{0}\hat{\sigma}(0) + \frac{\hat{\sigma}(s)}{\tau^\alpha} = 0, \tag{17}$$

které má následující řešení

$$\hat{\sigma}(s) = \frac{s^{\alpha-1}C}{s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha}}, \tag{18}$$

kde konstanta C nyní pochází z jiné počáteční podmínky $\hat{\sigma}(0) = C$. Konečně řešení po aplikaci inverzní transformace je

$$\sigma(t) = CE_{\alpha,1}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right), \tag{19}$$

2 Zlomková vazkopružnost

Pojďme nyní diskutovat nad použitím zlomkových konstitutivních vztahů pro viskoelastické modely.

Základní myšlenka je velmi jednoduchá. Elastický materiál je materiál, který je reprezentován konstitutivním vzathem $\sigma = E\varepsilon$ neboli napětí σ je přímo úměrné deformaci ε a konstanta úměrnosti je Youngův modul pružnosti E. Naproti tomu vazký materiál, jako je například med, je reprezentován konstitutivním vztahem $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ neboli napětí je přímo úměrné první derivaci deformace (rychlosti) a konstanta úměrnosti je viskozita η.

$$\sigma = E\varepsilon \quad \leftarrow \quad \sigma = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon \quad \rightarrow \quad \sigma = \eta\dot{\varepsilon} \tag{20}$$