Sylabus

Počítání příkladů na vlastnosti pravděpodobnosti, podmíněnou pst a Bayesovu větu.

Příklady

Zadání úloh je převzato od Dr. Zikmundové.

Cvičení 1. V šuplíku je 6 černých, 4 bílé a 2 modré ponožky. Ráno (ještě potmě) vytáhneme 3 ponožky najednou. Určete pravděpodobnost jevu, že

1. všechny ponožky jsou stejné barvy (jev A),
2. aspoň 2 ponožky jsou stejné barvy (jev B).

Řešení:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{6}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{20+4}{220} = \frac{24}{220} = \frac{6}{55} \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{6*4*2}{220} = \frac{12}{55}, \text{ nebo } \mathbb{P}(B) = \frac{6\binom{6}{2} + 8\binom{4}{2} + 10\binom{2}{2} + 24}{220} = \frac{90+48+10+24}{220} = \frac{43}{55} \tag{2}$$

Cvičení 2. (vznikl na základě ankety zadané na cvičení vašich kolegů) Nechť pravděpodobnost jevu K, že student VŠCHT pije kofolu, je $\mathbb{P}(K) = 3/5$, jevu P, že student VŠCHT pije pivo, je $\mathbb{P}(P) = 13/20$. Dále víme, že $\mathbb{P}(K \cap P) = 7/20$. Stanovte pravděpodobnosti jevů, že student VŠCHT

1. pije aspoň jeden nápoj, $\mathbb{P}(K \cup P) = \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(K \cap P) = 0.9$
2. pije pouze kofolu, $\mathbb{P}(K) - \mathbb{P}(K \cap P) = 0.25$
3. nepije ani pivo, ani kofolu, $1 - \mathbb{P}(K \cup P) = 0.1$
4. nepije pivo, $1 - \mathbb{P}(P) = 0.35$
5. pije buď jen kofolu, anebo pouze pivo, $\mathbb{P}(K \cup P) - \mathbb{P}(K \cap P) = 0.55$
6. pije pivo, ale nepije kofolu, $\mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(K \cap P) = 0.3$
7. pije nejvýše jeden z uvedených nápojů. $1 - \mathbb{P}(K \cap P) = 0.65$

Cvičení 3. Házíme dvěma kostkami. Označme jevem A, že padne šestka a jevem B, že součet na obou kostkách je 8.

1. Určete $\mathbb{P}(A|B)$ $\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{5}$.
2. Zjistěte, zdali jsou jevy A a B nezávislé. Nejsou nezávislé, neboť $\mathbb{P}(A) = \frac{11}{36} \neq \mathbb{P}(A|B)$

Cvičení 4. V osudí je osm bílých a dvě červené koule. V prvním tahu vytáhneme jednu kouli. Kouli vrátíme zpět a ještě do osudí přidáme jednu kouli stejné barvy jako byla vytažená koule. Táhneme znovu z osudí. Určete pravděpodobnost, že

1. ve druhém tahu vytáhneme červenou kouli,
   $\mathbb{P}(C2) = \mathbb{P}(C2|B1)\mathbb{P}(B1) + \mathbb{P}(C2|C1)\mathbb{P}(C1) = \frac{2}{11}\frac{8}{10} + \frac{3}{11}\frac{2}{10} = \frac{16}{110} + \frac{6}{110} = \frac{1}{5}$
2. ve druhém tahu vytáhneme bílou kouli, $\mathbb{P}(B2) = 1 - \mathbb{P}(C2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
3. vytáhneme dvakrát červenou kouli, $\mathbb{P}(C2 \cap C1) = \mathbb{P}(C2|C1)\mathbb{P}(C1) = \frac{3}{11}\frac{2}{10} = \frac{3}{55}$
4. první tažená koule byla červená, jestliže jsme v druhém tahu vytáhli červenou kouli.
   $\mathbb{P}(C1|C2) = \frac{\mathbb{P}(C1 \cap C2)}{\mathbb{P}(C2)} = \frac{\frac{3}{55}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{11}$

Cvičení 5. Ve studijním kruhu je 30 studentů, z toho 20 tmavovlasých a 10 světlovlasých. Pravděpodobnost jevu, že tmavovlasý student má krátké vlasy, je 0,7. Pravděpodobnost, že světlovlasý student bude mít dlouhé vlasy, je 0,9. Spočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybraný

1. tmavovlasý student bude dlouhovlasý, $\mathbb{P}(D|T) = 1 - \mathbb{P}(K|T) = 1 - 0.7 = 0.3$
2. světlovlasý student bude krátkovlasý, $\mathbb{P}(K|S) = 1 - \mathbb{P}(D|S) = 1 - 0.9 = 0.1$
3. student bude mít tmavé dlouhé vlasy, $\mathbb{P}(D \cap T) = \mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T) = \frac{3}{10}\frac{2}{3} = 0.2$
4. student bude mít krátké světlé vlasy, $\mathbb{P}(K \cap S) = \mathbb{P}(K|S)\mathbb{P}(S) = \frac{1}{10}\frac{1}{3} = \frac{1}{30}$
5. student bude mít dlouhé vlasy. $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(D|S)\mathbb{P}(S) = \frac{2}{10} + \frac{9}{10}\frac{1}{3} = 0.5$
6. Se zavázanýma očima jsme náhodně vybrali studenta a dotekem zjistili, že má krátké vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je světlovlasý?
   $\mathbb{P}(S|K) = \frac{\mathbb{P}(K|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(K|T)\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(K|S)\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{10}\frac{2}{3}+\frac{1}{30}} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{15}{30}} = \frac{1}{15}$
7. Opět jsme naslepo vybrali studenta a dotekem zjistili, že je dlouhovlasý. Určete pravděpodobnost, že vybraný student je
   - tmavovlasý,
     $\mathbb{P}(T|D) = \frac{\mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$
   - světlovlasý. $1 - \mathbb{P}(T|D) = \frac{3}{5}$

Cvičení 6. Studentka jezdí do školy na kole ve třech z pěti případů, v ostatních jede MHD. Pravděpodobnost, že přijede včas, jela-li na kole, je 4/5. Pravděpodobnost, že přijede pozdě, jela-li MHD, je 9/10. Jaká je pravděpodobnost, že studentka

1. přijede do školy včas?
   $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|K)\mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(V|M)\mathbb{P}(M) = \frac{4}{5}\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\frac{2}{5} = \frac{24}{50} + \frac{2}{50} = \frac{13}{25} = 0.52$
2. jela do školy na kole, pokud přijela včas?
   $\mathbb{P}(K|V) = \frac{\mathbb{P}(V|K)\mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\frac{24}{50}}{\frac{26}{50}} = \frac{12}{13}$